HYPOTESEPRØVING I ET INNSKRENKET PARAMETERROM

BELYST UT FRA MAKSIMINPRINSIPPET

Hovedfagsoppgave i matematisk statistikk

av

Erik Nesheim Mønness

INNHOLD

FORORD

Visse optimalitetskriterier leder i noen tilfeller til metoder som synes å neglisjere endel apriori gitt informasjon.

Jeg skal i denne oppgaven spesielt se på hypoteseprøvingssituasjoner med et innskrenket parameterrom. "Innskrenket" vil her typisk bety at en parameter ligger i et bestemt intervall, eller at to parametre er ordnet i størrelse.

Jeg skal undersøke om, og eventuelt hvordan slik informasjon kan brukes.

Jeg har funnet maksiminprinsippet som et nyttig hjelpemiddel i denne sammenheng.

I kap 2. gis derfor noen resultater om maksiminprinsippet: Setning 1 sier at en maksiminløsning i et delproblem under betingelser også er maksiminløsning i et større. Setning 2 kombinerer dette med en parametrisert modell der en observator er suffisient for en parameterfunksjon.

Dette anvendes i en rekke eksempler. I kap 3 gis eksempler der de "vanlige" testene også bør andvendes i et innskrenket parameterrom. I 3.4 finner vi at OAS S test i en

variauskomponentmodell også er maksimin-
løsning og mest stringent test. I kap 4
ser vi på situasjoner der det er mulig å
anvende informasjon om innskrenket
parameterrom; og vi finner testene og
styrkefunksjonene eksplisitt, og sammenlikner med de "vanlige" testene.

Det er u. lektor Ragnar Norberg som har foreslått problemstillingen. Jeg vil på det hjerteligste få takke, både for å ha fått arbeide med et interessant problem, og for den veiledning jeg har fått.

Praktisk om oppgaven:

Nummerering av formler og uttrykk er separat for hvert kapittel, henvisninger går innen samme kapittel om ikke annet er anført.

Følgende forkortelser er brukt:

OAS = overalt sterkest
OASS = " styrkerett
OASI = " invariant
VKM = variauskomponentmodell.

INNLEDNING.

Vi skal presisere problemstillingen gjennom et eksempel.

Betrakt følgende varianskomponent-modell. (VKM)

La

$$X_{ij} = \xi + A_i + B_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, I. \\ j = 1, \ldots, J. \end{array}$$

$A_i \sim N(0, a)$, $B_{ij} \sim N(0. b)$. Alle er uavhengige.

Ved suffisiens reduserer vi til observatoren (Z, X, Y), der Z, X, Y er uavhengige, og

$$Z = \bar{X}_{..} \quad , \quad X = \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \quad ,$$

$$Y = \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 \quad .$$

La nå $\mu = \sqrt{IJ} \cdot \xi$, $\sigma^2 = b^2$, $\tau^2 = Ja^2 + b^2$, $n = I - 1$ og $m = J(I-1)$. Fordelingene til Z, X, Y er da gitt ved at

$$Z \sim N(\mu, \tau)$$

$$\frac{X}{\tau^2} \sim \chi^2_n$$

$$\frac{Y}{\sigma^2} \sim \chi^2_m$$

Her har vi en innskrenkning av parameterrommet (μ, τ, σ), da $\tau > \sigma$.
Vi skal teste hypotesen

$$\mu \le 0 \text{ mot } \mu > 0 .$$

For dette problemet finnes det en OASS test, gitt ved

$$(1) \qquad \varphi_0(Z, X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \frac{Z}{\sqrt{X}} > k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

φ_0 er OASS også om $\tau > 0$, $\sigma > \tau$ etc, bare parameterrommet på randen $\mu = 0$ er åpent.

Testen er altså uavhengig av Y, og vi skriver derfor $\varphi_0 = \varphi_0(Z, X)$. Nå er fordelingen til Y avhengig av σ^2, og gir derved indirekte informasjon om τ. En burde da vente å finne noen tester som avhenger av (også) Y, som har større styrke enn φ_0 på en del av parameterområdet.

Kravet om styrkeettlhet leder altså til testen φ_0, og å ignorere informasjonen $\tau > \sigma$. For å kunne bruke denne informasjonen må vi derfor oppgi kravet om styrkeettlhet.

Ingen test vil ha større styrke enn φ_0 overalt (for da hadde den blitt styrkerett - vi får en motsigelse).

Det vi kan ha håp om å finne, er tester som har større styrke enn φ_0 for noen alternativer av spesiell interesse, og mindre styrke ellers.

La oss forsöke å finne tester i VKM ut fra invariansprinsippet. Om det skulle finnes en OASI vil den i dette tilfelle falle sammen med φ_0 (Lehmann 1959, kap 6.6 s 229)
Nå finnes ingen OASI test i VKM, vi kan derfor vente å finne tester bedre enn φ_0 noen steder.

Hypoteseprøvingsituasjonen er invariant overfor gruppen $\mathcal{C}$ av transformasjoner
$(Z, X, Y) \longmapsto (cZ, c^2X, c^2Y) \qquad c>0.$
I parameterrommet induserer $\mathcal{C}$ transformasjonene $(\mu, \tau^2, \sigma^2) \longmapsto (c\mu, c^2\tau^2, c^2\sigma^2), c>0.$

Maksimalinvariant observator blir $\left(\frac{Z}{\sqrt{X}}, \frac{Y}{X}\right)$ og maksimalinvariant parameterfunksjon blir $\left(\frac{\mu}{\tau}, \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right) = (\mu', \delta^2)$

der $\mu' \in \mathbb{R}$, $\delta^2 \in \langle 0, 1]$.

Merk at vi ikke har invarians overfor gruppen av transformasjoner

$$(Z, X, Y) \xmapsto{b,c} (cZ, c^2 X, bY) \qquad b, c > 0$$

da vi her ikke får bibeholdt forholdet mellom σ og τ.

Merk også at φ_0 er invariant, da den bare avhenger av $\frac{Z}{\sqrt{X}}$.

Betrakt følgende delklasse av invariante tester: Forkast hvis

(2) $$\frac{Z}{\sqrt{X}} > g\left(\frac{Y}{X}\right), \qquad \text{der } g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+.$$

Vi skal dessuten kreve at g er ikke-avtakende. Dette er motivert slik:

Vi hadde

(3) $$\varphi_0 = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \frac{Z}{\sqrt{X}} > k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Hvis τ hadde vært kjent hadde OAS test hvert

$$\varphi^* = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \frac{Z}{\tau} > k' \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvis $\frac{Y}{X}$ er stor tyder det på at τ^2 er underestimert av $\frac{X}{n}$ i (3). Derfor øker vi forkastningsgrensen.

Hvis $\frac{Y}{X}$ er liten er τ^2 "godt" estimert av $\frac{X}{n}$; vi kan senke forkastningsgrensen. På denne måten kan en håpe å få en test (2) som er "mere lik φ^* enn φ_0 er".

Vi skal se på noen eksempler på (2) med forskjellige g'er:

(i) Hvis $\frac{Y}{X} < c$ forkast om $\frac{Z}{\sqrt{X}} > k_1$.
Hvis $\frac{Y}{X} \geq c$ forkast om $\frac{Z}{\sqrt{X}} > k_2$.
Her blir

$$g(t) = \begin{cases} k_1 & \text{for } t < c \\ k_2 & \text{for } t \geq c \end{cases},$$

og vi må ha $k_1 < k_2$ for å få g ikke-avtakende.

(ii) For $\delta^2 = a$ kjent blir OASS test den som forkaster når $Z / \sqrt{X + \frac{Y}{a}} > k$.
La oss erstatte a med et estimat; $\frac{Y}{X} \cdot$ konstant. Forkast om

$$\frac{Z}{\sqrt{X + \frac{Y}{\frac{Y}{X}\cdot \text{konstant}}}} > k \iff \frac{Z}{\sqrt{X}} > k'.$$

Testen ble altså lik φ_0, og eksemplet gir oss også tilfellet $g =$ konstant.

(iii) Hvis $\delta^2 = 1$ ville vi ha estimert variansen med $\frac{X+Y}{m+n}$.

Hvis $\delta^2 < 1$, estimerer vi med $\frac{X}{n}$.

Vi kan derfor lage en foreløpig test på δ^2:

$$H' : \delta^2 = 1 \text{ mot } \delta^2 < 1.$$

Forkast hvis $\frac{Y}{X} < c$.

Vi tester nå $\mu' \leq 0$ slik:

Hvis H' aksepteres, forkast om

$$\frac{Z}{\sqrt{X+Y}} > k \iff \frac{Z}{\sqrt{X}} > k\sqrt{1+\frac{Y}{X}}.$$

Hvis H' forkastes, forkast om

$$\frac{Z}{\sqrt{X}} > k'.$$

g er her gitt ved $g(t) = \begin{cases} k' & t < c \\ k\sqrt{1+t} & t \geq c \end{cases}$

og den blir ikkeavtakende hvis $k' \leq k\sqrt{1+c}$.

Vi skal nå gå tilbake til den generelle form (2) av g for å bestemme den slik at testen holder nivå.

Styrken er:

$$\Pr(\text{forkaste}) = \Pr\left(\frac{Z}{\sqrt{X}} > g\left(\frac{Y}{X}\right)\right) =$$

$$= \Pr\left[\frac{\frac{Z}{\tau}}{\sqrt{\frac{X}{\tau^2}}} > g\left(\frac{\frac{Y}{\delta^2}}{\frac{X}{\tau^2}} \cdot \frac{\delta^2}{\tau^2}\right)\right] =$$

$$= \Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > g\left(\frac{Y'}{X'}\,\delta^2\right)\right)$$

der $Z' = \frac{Z}{\tau}$ osv.

For hver μ' har vi nå at

$$\Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > g(0)\right) = \sup_{\delta^2 \in \langle 0,1]} \Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > g\left(\frac{Y'}{X'}\,\delta^2\right)\right)$$

fordi g er ikkeavtakende. Da testen skal holde nivå for $\mu' \leq 0$ og $\delta^2 \in \langle 0,1]$, vil $g(0)$ minst måtte være slik at

$$\Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > g(0)\right) = \varepsilon \quad \text{for } \mu' = 0 \ .$$

Vi må derfor sette $g(0) \geq$ konstanten i testen φ_0. Testen vil derfor få styrke mindre eller lik styrken til φ_0 overalt i alternativet.

Vi har nå sett et eksempel på en hypoteseprøvingssituasjon med et innskrenket parameterrom og vi har forsøkt å finne en alternativ test til den OASS. (Noe vi riktignok ikke har lykkes med så langt) Det virker rimelig at en alternativ test

skal finnes, vi skal nå se hvordan vi
kan få avkreftet/bekreftet dette.

KAP. 2. ENDEL RESULTATER

Under arbeidet med testing i et begrenset parameterrom har det vist seg at maksiminprinsipet er et tjenlig middel i slike situasjoner. Vi skal derfor gi noen resultater som leder oss til tester bygget på dette prinsipp. Slike tester skal vi kalle maksimintester.

Vi skal innskrenke oss til dominerte eksperimenter. Det garanterer oss eksistens av maksimintester, sterkeste tester mot et spesifisert alternativ, og mest stringente tester.

Setning 1

La $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ være et dominert eksperiment.

La $\omega_0 \subset \Omega_0 \subset \Theta$ og $\omega_1 \subset \Omega_1 \subset \Theta$ slik at $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$.

La φ være en maksimintest for

$$\omega_0 \text{ mot } \omega_1$$

med nivå ε.

Anta at

(1) $E_\theta \varphi \leq \varepsilon \quad \forall \theta \in \Omega_0$, og

(2) $\inf\limits_{\theta \in \omega_1} E_\theta \varphi = \inf\limits_{\theta \in \Omega_1} E_\theta \varphi$.

Da er φ en maksimintest for Ω_0 mot Ω_1, og den er entydig hvis φ er entydig maksimintest for ω_0 mot ω_1.

Bevis:

φ holder nivå på grunn av (1).
La φ' være en test for Ω_0 mot Ω_1.
Da er

$$\inf_{\theta \in \Omega_1} E_\theta \varphi' \leq \inf_{\theta \in \omega_1} E_\theta \varphi' \leq \inf_{\theta \in \omega_1} E_\theta \varphi = \inf_{\theta \in \Omega_1} E_\theta \varphi$$

så φ maksimerer den minimale styrke: φ er maksimintest.

Anta nå ψ er en annen maksimintest for Ω_0 mot Ω_1.

Da må

(3) $\inf\limits_{\theta \in \omega_1} E_\theta \varphi = \inf\limits_{\theta \in \Omega_1} E_\theta \varphi = \inf\limits_{\theta \in \Omega_1} E_\theta \psi \leq \inf\limits_{\theta \in \omega_1} E_\theta \psi .$

Da ψ er en test må den spesielt holde nivå på ω_0. Av (3) følger da at ψ er maksimintest også for ω_0 mot ω_1. Hvis nå φ er entydig maksimintest for dette problemet må derfor ψ og φ være like. φ er derfor entydig maksimintest for

Ω_0 mot Ω_1

■

Hvis φ er nesten entydig (m.h.p dominerende mål), eller nesten entydig utenom eventuell randomisering (der testens verdi er forskjellig fra 0 eller 1), maksimintest for ω_0 mot ω_1, og ellers holder forutsetningene i setning 1, vil den være maksimintest for Ω_0 mot Ω_1 med de samme "nesten-entydighetene".

Bemerk at en i ulike testproblemer, der interesseområdene omfatter ω_0 og ω_1, og slik at (i) og (ii) holder, vil finne samme maksiminløsning.

Vi kan også nytte disse resultatene til å finne sterkeste test for en hypotese mot et helspesifisert alternativ bare ved å sette $\omega_1 = \Omega_1$ lik en enpunktsmengde.

Hvis derfor φ er sterkeste test for ω_0 mot $\{\theta_1\}$ og φ holder nivå på Ω_0, vil den også være sterkeste test for Ω_0 mot $\{\theta_1\}$. Vi får samme envelopefunksjon i de to tilfeller, for de θ_1 dette gjelder.

Setning 1 kunne ha vært formulert med minst gunstige fordelinger, der vi hadde hatt slike over ω_0 og ω_1, ved å bruke de "samme" over Ω_0 og Ω_1 (Vi måtte da dessuten ha hatt forutsetninger om målbarhet av parameterrom og på tetthetene, se Lehman 1959, kap 8.1 s 327). Fordelen med denne formuleringen er at vi ikke trenger å kjenne minst gunstige fordelinger over ω_0 og ω_1.

Setning 2

La $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, P_{\theta,\rho}, (\theta,\rho) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{1+k})$ være et dominert eksperiment, der θ er en reell parameter.

La $X : (\mathcal{W}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Anta at X er suffisient (for θ) for hver kjent ρ og anta at $P_{\theta\rho}X^{-1} = P_\theta X^{-1}$ bare avhenger av θ.

Definer for $\theta_0 < \theta_1$

$$H(\theta_0) = \{(\theta,\rho) \in \Omega \mid \theta \le \theta_0\}$$
$$S(\theta_0) = \{(\theta,\rho) \in \Omega \mid \theta > \theta_0 , (\theta_0,\rho) \in \Omega\}$$
$$K(\theta_1) = \{(\theta,\rho) \in \Omega \mid \theta \geq \theta_1\}$$
$$I(\theta') = \{(\theta,\rho) \in \Omega \mid \theta = \theta'\}.$$

La $\varphi(X)$ være den sterkeste X-baserte testen for å teste θ_0 mot θ_1 $(\theta_1 > \theta_0)$. Anta den er entydig.[x)]

Da gjelder:

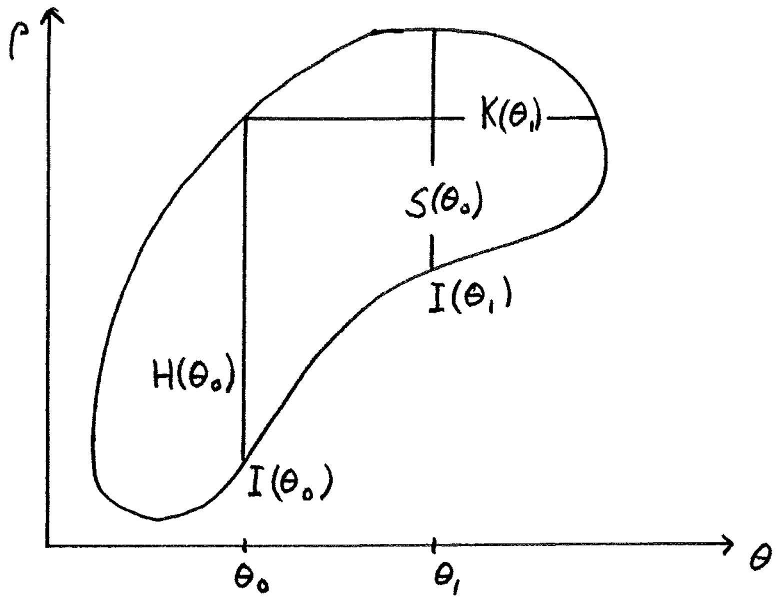
(i) For å teste $I(\theta_0)$ mot $I(\theta_1) \cap S(\theta_0)$ er $\varphi(X)$ entydig OAS test.

(ii) For å teste $I(\theta_0)$ mot $I(\theta_1)$ er $\varphi(X)$ entydig maksimintest såsant

$$I(\theta_1) \cap S(\theta_0) \neq \emptyset .$$

(iii) Hvis $P_\theta X^{-1}$ har monoton sannsynlighets-kvote er $\phi(X)$ entydig OAS test for å teste $H(\theta_0)$ mot $S(\theta_0)$.

(iv) Hvis $P_\theta X^{-1}$ har monoton sannsynlighets-kvote er $\phi(X)$ entydig maksimin-test for å teste $H(\theta_0)$ mot $K(\theta_1)$, såsant $I(\theta_1) \cap S(\theta_0) \neq \emptyset$.



Bemerk at Frazer, 1956 har vist (i) på en annen måte enn her, der han også forutsetter kartesisk produkt av θ og ρ

x) Vi vil altid ha entydighet utenom eventuell randomisering, og dessuten kan vi ha flertydighet om vi har nivå null eller styrke én.

Bevis.

(i) Velg et alternativ (θ_1, ρ_1). Vi skal

(4) teste $I(\theta_0)$ mot (θ_1, ρ_1).

Betrakt nå først

(5) $$(\theta_0, \rho_1) \text{ mot } (\theta_1, \rho_1)$$

Her har vi en dikotomi der X er suffisient. Den sterkeste testen er derfor den sterkeste X-baserte testen, som er $\varphi(X)$. Den er entydig da Neyman-Pearsonkonstruksjonen er entydig.

La nå hypotese og alternativ i dikotomien (5) være ω_0 og ω_1, og sett $\Omega_0 = I(\theta_0)$ og $\omega_1 = \Omega_1$. φ er også maksimintest for ω_0 mot ω_1, og da den holder nivå på Ω_0 er den maksimintest for Ω_0 mot ω_1, og den er entydig. (Setning 1). Da ω_1 er enkelt, er derfor φ entydig sterkeste test for Ω_0 mot ω_1 eller, φ er entydig sterkeste test for (4). Da den dessuten er uavhengig av alternativet er den OAS.

(ii) Av forutsetningene følger at det finnes ρ_1 slik at $(\theta_0, \rho_1) \in I(\theta_0)$ og $(\theta_1, \rho_1) \in I(\theta_1)$
Vi fant over at for en slik dikotomi er φ sterkeste test, og da er den spesielt entydig maksimintest. Resultatet følger nå av setning 1; sett $(\theta_0, \rho_1) = \omega_0$ $(\theta_1, \rho_1) = \omega_1$, $I(\theta_0) = \Omega_0$, $I(\theta_1) = \Omega_1$. φ holder kravene (1) og (2) da styrken er uavhengig av ρ.

(iii) Testen i (i) blir uavhengig av θ_1 og dermed OAS (Lehman, 1959, teorem 2 side 68). Entydigheten følger på samme måte som i (i)

(iv) Beviset går som i (ii) men med $H(\theta_0) = \Omega_0$ og $K(\theta_1) = \Omega_1$. φ holder forutsetningene (1) og (2) fordi styrken er voksende i θ (Dette følger av monoton sannsynlighetskvote)

■

Setning 2 kunne ha vært formulert ved hjelp av minst gunstige fordelinger og da blitt et slags spesialtilfelle av teorem 1, Lehman 1959, kap 8.1 s 327. Jeg har valgt denne formuleringen for å kunne bruke resultatene i setning 1.

Betrakt setning 2, (i) og (ii) igjen. Beviset gjør ikke bruk av at θ er endimensjonal. Vi har derfor:

Korollar 3:

Forutsetninger som i setning 2, men la θ være flerdimensjonal.

For å teste

$$I(\theta_0) \text{ mot } I'(\theta_1) = \left((\theta,\rho) \in \Omega \mid \theta = \theta_1, (\theta_0,\rho) \in I(\theta_0) \right)$$

er φ entydig OAS test.

For å teste

$$I(\theta_0) \text{ mot } I(\theta_1)$$

er φ entydig maksimintest såsant $I'(\theta_1) \neq \emptyset$. ∎

KAP. 3. EKSEMPLER

3.1 La W være en stokastisk vektor med tetthet

$$\frac{dP_{\theta\rho}}{dP_0} = A(\theta,\rho)\exp\left\{\sum_{i=1}^{r}\rho_i Y_i(w) + \theta X(w)\right\}.$$

Vi har m.a.o. en Darmois-Koopmansk fordelingsklasse.

For gitt $\rho = (\rho_1 \dots \rho_r)$ er X suffisient. Hvis variasjonsområdet til $X(w)$ er uavhengig av variasjonsområdet til $Y(w) = (Y_1(w), \dots, Y_r(w))$ så er (X uavhengig av Y og) fordelingen til X bare avhengig av θ. Forutsetningene i setning 2 (iii) og (iv) er da oppfylt og hypoteser om θ kan testes med hjelp av resultatene der.

Kravet om uavhengige variasjonsområder er sterkere enn at fordelingen til X bare skal avhenge av θ. Betrakt følgene eksempel:

3.2 La (U,V) være to uavhengige poissonfordelte variable, med parametre λ_1 og λ_2 henholdsvis. Vi er interessert i å trekke inferens om parameterfunksjonen $\lambda_1 + \lambda_2$.

La $\theta = \lambda_1 + \lambda_2$

og $\rho = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

(θ, ρ) er (1-1) med (λ_1, λ_2) så vi kan utrykke simultantettheten mellom U og V ved disse parametre: $(X(u,v) = u+v)$

$$P_{\lambda_1 \lambda_2}(U=u, V=v) = po(X(u,v);\theta)\cdot b(u; X(u,v), \rho)$$

der po( ) er poissontettheten og b( ) er den binomiske tetthet med X forsøk og sannsynlighet ρ.

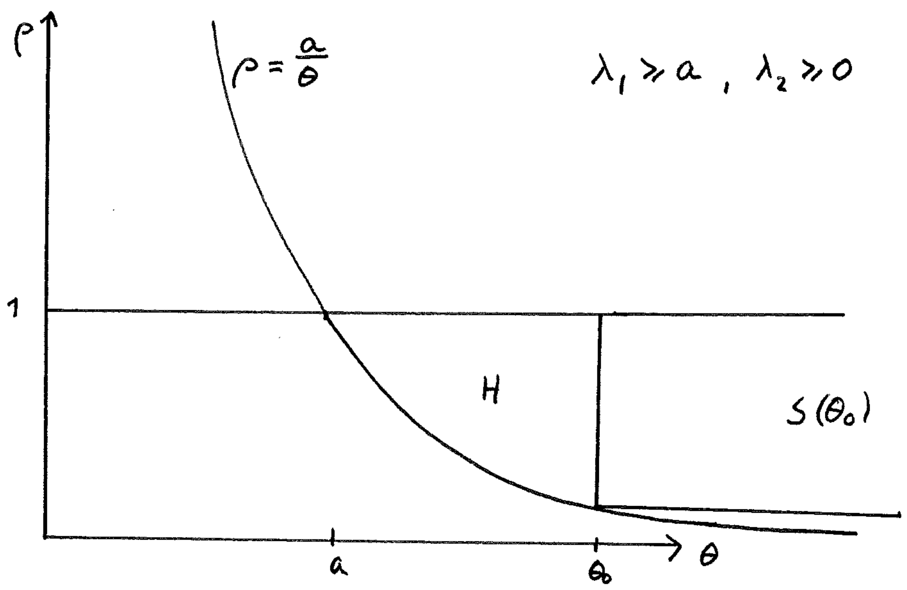
For fast ρ blir X suffisient, og fordelingen til X er bare avhengig av θ. Vi kan derfor bruke setning 2 (iii) og (iv) da X dessuten har voksende sannsynlighets-kvote i θ.

Vi skal teste

(1) $\theta \le \theta_0$ mot $\theta > \theta_0$.

(i) Anta vi apriori hadde $\lambda_1 > \lambda_2 \Leftrightarrow \theta > 0$, $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$ (Vi får her kartesisk produkt mellom θ og ρ). Hele alternativet i (1) ligger i $S(\theta_0)$ så OAS test forkaster når $X > k$.

(ii) Anta $\lambda_1 \ge a > 0$. Her vil alternativet i (1) omslutte $S(\theta_0)$. På $S(\theta_0)$ vil den testen som forkaster når $X > k$ være OAS, utenom kan vi nok finne tester som har større styrke. Da ρ er symetrisk i λ_1 og λ_2



vil vi få samme situasjon om $\lambda_2 \geq a$, $\lambda_1 \geq 0$. For store θ_0 ser vi at $S(\theta_0)$ vil utgjøre nesten hele alternativet. For θ_0 liten vil vi få en betydelig del av alternativet utenfor $S(\theta_0)$. Hvis en er spesielt interessert i disse alternativene, kan en derfor ha håp om å finne en test som er bedre enn den OASS (som altså er OAS på $S(\theta_0)$, den som forkaster når $X > k$) på dette området. (Vi skal finne en slik test i et senere eksempel, dog ikke med denne hypotesen).

(iii) Anta vi istedet skulle teste hypotesen

$$\theta \geq \theta_0 \quad \text{mot} \quad \theta < \theta_0 .$$

I situasjonen (ii) over vil da $S(\theta_0) = \{(\theta, \rho) \mid \theta \leq \theta_0, (\theta_0, \rho) \in I(\theta_0)\}$ utgjøre hele alternativet; testen som forkaster når $X < k$ er OAS. (Setning 2 (iii) med alle ulikheter snudd.)

3.3 Median, et ikkeparametrisk eksempel.

Anta $X_1, \ldots, X_n$ uavhengige med kontinuerlig og symmetrisk kumulativ fordeling D.
Anta $Y_1, \ldots, Y_n$ uavhengige med kumulativ fordeling F
Anta X'er og Y'er er uavhengige, men at $F(x) \geq D(x)$.
Vi skal teste

(2) $\quad D(0) = \frac{1}{2}$ mot $D(0) \leq q \quad (q < \frac{1}{2})$

Y'ene er stokastisk mindre enn X'ene. Store Y'er skulle indikere at F, og dermed D, har massen konsentrert på store verdier, altså at $D(0)$ er liten. Om vi konstruerer en test for (2) som baserer seg på både X'ene og Y'ene skulle vi da kunne vente å finne en test som er bedre enn en som bare er avhengig av X.

Setning 2(iv) medfører derimot at maksimintesten for (2) basert på X'ene også er entydig maksimintest når observasjonene er både X'er og Y'er; den X'baserte testen er altså tillatt.

Basert på X'ene finnes en entydig maksimintest for (2). Det er tegntesten, som

(3) forkaster når $\quad \# \{ X_i \mid X_i > 0 \} > k$.

(Se Erik Ruist, 1954, eller Lehman, 1959, kap 8.6 opg. 5 s 343)

Dette resultatet er funnet ved hjelp av minst gunstige fordelinger som leder til å se på hypotesen

(4) D_H mot D_A

der $D_H(0) = \frac{1}{2}$ og $D_A(0) = q$; dette er m.a.o. fordelinger fra hypotese og alternativ i (2), se i referansen på hvordan de faktisk ser ut.

For vårt problem kan vi bruke dette:

Velg en F slik at $F(x) \geq D_H(x)$ $\forall(x)$

Vi skal teste

(5) (F, D_H) mot (F, D_A)

Dette er punkter i hypotese og alternativ i (2)

da $F(x) \geq D_H(x) \geq D_A(x)$ $\forall(x)$

For (5) er $X_1, \dots, X_n$ suffisient, tegntesten (3) blir sterkest for (5). Da styrken er uavhengig av F, og ellers holder kravene for maksimintest i D, er den entydig maksimintest for (2) via setning 1.

D_H og D_A har tetthet m.h.p Lebeguemålet. F kan da velges slik at også F har tetthet; entydigheten refererer seg til Lebeguemålet.

3.4 Testing på P(A) der P sannsynlighetsmål.

$X_1, \ldots, X_n$ uavhengige med fordeling slik at
$p = Pr(X \in A) \in \langle 0,1 \rangle$, der A en mengde.
$Y_1, \ldots, Y_m$ uavhengige med fordeling uavhengig av X'ene men med $q = Pr(Y \in A) \geq Pr(X \in A)$
Vi skal teste

$$p \leq p_0 \text{ mot } p > p_0$$

I denne situasjonen er tegntesten, som forkaster når $\#\{X_i \mid X_i \in A\} > k$ en OAS blant tester basert på X. (Lehmann 1959, kap 3.8 s 93)

Testen er også OAS blant tester basert på både X'er og Y'er.

For et villårlig alternativ (P_1, Q_1) (kumulative fordelinger til X og Y) kan vi nemlig alltid velge et par i hypotesen (P_0, Q_1). (P_0 svarer til fordelingen i Lehman når P_1 er valgt). Y'ene forsvinner nu ved suffesiens, testen blir som om vi ikke hadde observert Y'ene, og holder derfor nivå uansett Y'enes fordeling.

3.5 Eksempel. Varianskomponentmodellen.

I innledningseksempelet fikk vi problemer med å finne en test på formen $\frac{Z}{\sqrt{X}} > g\left(\frac{Y}{X}\right)$, da den skulle holde nivå også for små δ^2. Vi skal nå la parameterrommet omfatte $\delta^2 = 0$, eller $\sigma = 0$ når vi ser på det opprinnelige parameterrom (μ, τ, σ).

A. La det apriori parameterrom være $\{(\mu, \tau, \sigma) \mid \mu \in \mathbb{R},\ \tau \geq \sigma \geq 0,\ \tau > 0\}$.
Fordelingsklassen til (Z, X) er dominert av Lebeguemålet (m). Fordelingen til Y når $\sigma = 0$, P_0, (som altså har all sannsynlighetsmasse konsentrert i null, $P_0(Y=0)=1$) er ikke abs. kontinuerlig m.h.p m, men delfordelingsklassen for hvilke $\sigma > 0$ er det. Y's fordelingsklasse er da dominert av $m + P_0$, og hele eksperimentet er dominert av $m \times m \times (m + P_0)$.
I varianskomponentmodellen, VKM, slik den er definert her, eksisterer derfor maksimin-tester, mest stringente tester for hypoteser og alternativ vi måtte velge å teste.

Vi skal også i dette eksempelet kalle testen som forkaster når $\frac{Z}{\sqrt{X}} > k$, for φ_0.

B. Maksiminløsning

Vi skal nå bestemme maksimintest i VKM, for hypotesen

$$\mu \leq 0 .$$

Da vi har invarians overfor denne hypotesen skal vi forsøke oss med et invariant område i alternativet: Vi skal teste

$$\mu \leq 0 \,,\; \tau \geq \sigma \quad \text{mot} \quad \frac{\mu}{\tau} \geq K \,,\; \tau \geq \sigma$$

Vi skal vise at den OASS testen, φ_0, som forkaster når $\frac{Z}{\sqrt{X}} > k$ er entydig maksiminløsning. Dette får vi ved å bruke setning 1:

La nemlig $\omega_0 = \{(\mu, \tau, \sigma) \mid \mu = 0,\ \sigma = 0\}$, $\omega_1 = \{(\mu, \tau, \sigma) \mid \frac{\mu}{\tau} = K,\ \sigma = 0\}$ og la Ω_0 og Ω_1 være hypotese og alternativ som definert over.

Da φ_0 er OASS test for Ω_0 holder den nivå, og den antar sin minste styrke i Ω_1 på ω_1, fordi styrken er uavhengig av σ. Forutsetningene (1) og (2) i setning 1 er dermed oppfylt.

Det gjenstår å vise at φ_0

er entydig maksimintest for ω_0 mot ω_1. Merk at for $\delta = 0$ er $Y = 0$ n.s og (Z, X) er suffisient.

For å vise dette, trenger vi et resultat av Lehman og Stein, 1953.

De viste at hvis $X_1, \dots, X_{n+1}$ er uavhengige normale med ukjent forventning ξ og ukjent varians a^2, og vi skal teste $\frac{\xi}{a} = 0$ mot $\frac{\xi}{a} = K$ så er testen som forkaster når

$$\frac{\bar{X}}{\sqrt{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}} > c \,,$$

tillatt (foruten at den er OASS).

Da $(\bar{X}, \Sigma (X_i - \bar{X})^2)$ er suffisient, er dette det samme som å si at hvis vi har observasjoner (Z, X) uavhengige der $Z \sim N(\mu, \tau)$ og $\frac{X}{\tau^2} \sim \chi^2_n$, og vi skal teste $\frac{\mu}{\tau} = 0$ mot $\frac{\mu}{\tau} = K$ så er testen som forkaster når $Z/\sqrt{X} > c$, tillatt.

For $\delta = 0$ er det nettopp denne situasjonen vi har i VKM; da (Z, X) er suffisient for $\delta = 0$. For å teste ω_0 mot ω_1 er derfor φ_0 tillatt.

Vi skal nå se at dette leder til at φ_0 er entydig maksimintest for ω_0 mot ω_1.

La ψ være en maksimintest for ω_0 mot ω_1. Da må

$$\inf_{\omega_1} E\psi \geq \inf_{\omega_1} E\varphi_0 = E_{\frac{\mu}{\tau}=k}\,\varphi_0$$

fordi φ_0 har konstant styrke på ω_1. Dette er det samme som å si at

(6) $\quad E\psi \geq E\varphi_0 \quad$ på ω_1.

Da ψ dessuten er en test, har vi

(7) $\quad E\psi \leq \varepsilon \equiv E\varphi_0 \quad$ på ω_0

Vi kan nå ikke ha streng ulikhet for noen (μ, τ) i ulikhetene (6), (7) for da ville ψ være strengt bedre enn φ_0 og φ_0 ville dermed ikke være tillatt.

Da φ_0 er OAS blant nivåkonstante tester, er ψ det samme. Det følger at $\varphi_0 = \psi$ n.o., da OAS nivåkonstante test i en Darmois-Koopmansk fordelingsklasse er entydig.

(Vi har ingen randomisering her da klassen av fordelinger svarende til $\omega_0 \cup \omega_1$ er abs. kontinuerlige)

φ_0 er derfor entydig maksimintest for ω_0 mot ω_1, og derved entydig maksimintest for Ω_0 mot Ω_1 i VKM.

Merk at vi ikke har kunnet komme frem til dette resultatet ved bruk av minst gunstige fordelinger, da ingen (jeg vet om) har funnet minst gunstige fordelinger over ω_0 og ω_1. Hadde vi sett på invariante tester, vil vi finne at φ_0 er entydig maksimintest blant invariante tester; Hunt-Steins teorem[1] gir da at φ_0 er maksimintest blant alle tester, men vi ville ikke fått entydigheten da gruppa vi har invarians overfor ikke er kompakt (Ferguson, 1967, s 156).

Merk at det bare er nødvendig at hypotese og alternativ omfatter ω_0 og ω_1, og dessuten er adskilt av hyperplanene $\frac{\mu}{\tau} = 0$ og $\frac{\mu}{\tau} = K$, for at φ_0 skal være entydig maksimintest.

[1] Teorem 2, kap 8.4 s 336, Lehman 1959

C. Envelopefunksjonen i VKM.

Envelopefunksjonen, den maksimale styrke i hvert punkt, betraktet som funksjon av parametrene, er invariant (Lehman 1959, opg 15 s 252)

Envelopen i VKM vil derfor bare avhenge av (μ', δ^2). Vi skal i det følgende vise at den er konstant i δ^2, d.e avhenger bare av μ' (for tester med nivå: $\varepsilon < \frac{1}{2}$).

Vi skal først kort summere opp noen resultater fra Lehman og Stein, 1948. La $X_1, \dots, X_n$ være uavhengig identisk fordelte $N(\mu, \tau)$. Vi skal teste

$$\mu = 0, \ \tau > 0 \quad \text{mot} \quad \mu = \mu_1 \ \tau = \tau_1 \ (\mu_1 > 0).$$

For $\varepsilon < \frac{1}{2}$ er den sterkeste testen på formen: Forkast når $\sum (x_i - a)^2 \leq b$ der a, b er avhengig av (μ_1, τ_1) $(a > 0)$.

For $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ er den sterkeste testen φ_0, som er uavhengig av alternativet og derfor OAS.

Vi skal spesielt merke oss hvordan testen (for $\varepsilon < \frac{1}{2}$) er konstruert:

Ved å legge et apriorimål over hypotesen med all masse i et punkt $\mu = 0, \ \tau = \tau_0$ der $\tau_0 > \tau_1$ (τ_0 er også avhengig av ε).

Dette vil medføre, at om fordelingsklassen apriori omfatter mål med $\tau < \tau_1$ eller ikke, ikke vil influere på den maksimale teststyrken i (μ_1, τ_1):

Envelopefunksjonen for hypotesen $\mu = 0$ er den samme for de to eksperimentene med $\mu \geq 0, \tau > 0$ og $\mu \geq 0$, $\tau \geq k$ (>0) (Der begge er definert.)

(for tilfellet $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ konstrueres testen med en apriorifordeling som legger massen spredt utover linjestykket $\mu = 0, \tau \in [0, \tau_1]$. Dette er ikke mulig om variansen var begrenset nedad; i dette tilfellet får man en annen envelopefunksjon i det begrensede tilfelle $(\tau \geq k)$)

Så langt artikkelen. Vi skal se hva for konsekvenser den har for VKM.

Vi skal teste (med nivå $< \frac{1}{2}$)

(8) $\mu = 0, \ \tau \geq \sigma \geq 0 \ (\tau > 0)$ mot $\mu = \mu_1 \ \tau = \tau_1 \ \sigma = \sigma_1$ $(\tau_1 > \sigma_1)$

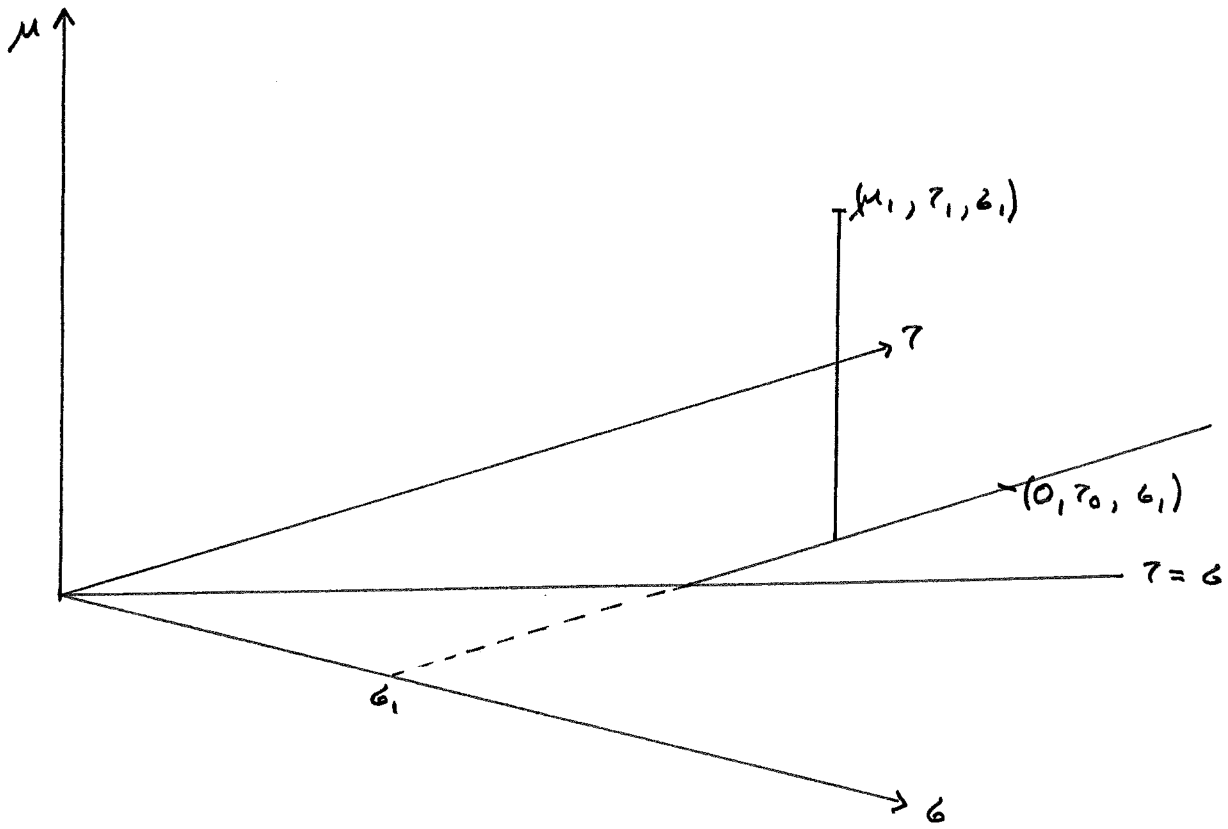
Betrakt nå følgende delproblem:

$\mu = 0, \ \tau \geq \sigma_1, \ \sigma = \sigma_1$ mot $\mu = \mu_1, \tau = \tau_1, \sigma = \sigma_1$

Vi har her samme σ_1, σ kan betraktes som kjent, så (Z, X) er suffisient. Da (Z, X) kan betraktes som suffesient sett observatorer for et sett normalfordelte variable, gjenkjenner vi situasjonen fra Lehman og Stein artikkelen:
Betrakt nå delproblemet

$$\mu = 0,\quad \tau = \tau_0,\quad \sigma = \sigma_1 \quad \text{mot} \quad \mu = \mu_1, \tau = \tau_1, \sigma = \sigma_1$$

der τ_0 er definert i artikkelen ($\tau_0 > \sigma_1$)
Den sterkeste testen for dette problemet tilsvarer den i artikkelen; de viste at den holder nivå når τ varierer, og den vil holde nivå også når σ varierer da styrken er uavhengig av σ. Ifølge setning 1 er den derfor sterkeste test for (8).



Testen holder faktisk nivå i hele planet $\mu = 0$; den er derfor sterkest mot $(\mu_1, \tau_1, \sigma_1)$ for begge hypotesene $\mu = 0, \tau \geq \sigma \geq 0$ og $\mu = 0, \tau > 0, \sigma \geq 0$.

Vi skal se at testen også holder nivå for $\mu < 0$. Testen forkaster når

$$\sum (X_i - a)^2 \leq b \qquad (a > 0)$$

(Vi kunne godt ha formulert dette med størrelser svarende til (Z, X), (kvader ut) men denne formen er lettere å behandle.)

Vi kan anta at X_i'enes varians er 1, og vi har $EX_i = \mu$. Da er testobservatoren ikkesentralt χ^2-fordelt med eksenterparameter $n(\mu - a)^2$, og den kumulative fordelingsfunksjon, som er lik styrkefunksjonen, er avtakende i eksenterparameteren (Sverdrup 1964, s 30). Da $n(\mu - a)^2$ vokser når μ avtar $(\mu < 0 < a)$ vil styrken avta når μ avtar; testen holder nivå for $\mu \leq 0$.

Vi har nå:

Envelopefunksjonen for hypotesene (når nivået $< \frac{1}{2}$) $(\mu = 0, \tau \geq \sigma \geq 0)$, $(\mu \leq 0, \tau \geq \sigma \geq 0)$ $(\mu = 0, \tau > 0, \sigma \geq 0)$ og $(\mu \leq 0, \tau > 0, \sigma \geq 0)$ mot alternativer med $\mu > 0$ er sammenfallende der de er definert.

Vi startet med å si at envelope-funksjonen er invariant, og at den i VKM (hypotese $\mu \leq 0, \tau \geq \sigma \geq 0$) bare avhang av (μ, τ, σ) via (μ', δ^2).

Overfor testproblemet med hypotese $\mu \leq 0, \tau > 0, \sigma \geq 0$ har vi invarians overfor transformasjonsgruppa som transformerer parameterrommet slik:

$$(\mu, \tau, \sigma) \xmapsto{a,d} (a\mu, a\tau, d\sigma) \quad a, d > 0$$

Maksimalinvariant parameterfunksjon blir i dette tilfelle $\frac{\mu}{\tau} = \mu'$.

Men da envelopen i dette problemet og i VKM er sammenfallende betyr det at envelopen i VKM bare avhenger av μ'.

D. Mest stringent test i VKM.

Vi fant i forrige avsnitt at envelopen bare avhang av (μ, τ, σ) via parameter-funksjonen $\mu' = \frac{\mu}{\tau}$.

Vi har dessuten vist at φ_0, som forkaster når $Z/\sqrt{X} > k$ er maksimin-test for

$$\mu \leq 0, \tau \geq \sigma \quad \text{mot} \quad \frac{\mu}{\tau} = K, \tau \geq \sigma ,$$

og dette gjelder for alle $K > 0$, da φ_0 er uavhengig av K. Da $\frac{\mu}{\tau} = K, \tau \geq \sigma$ er en kontur til envelopefunksjonen, er φ_0 mest stringent test (Lehman, 1959, kap 8.5 s 339-340).

Hvis maksimintesten og envelopen i et fult og et innskrenket parameterom blir de samme, fordi de er konstruert ut fra felles ω_0 og ω_1 områder, kan vi bruke invariansen i det fulle parameterrommet til å finne mest stringent test slik vi har gjort det her.

Et naturlig spörsmål er nå om φ_0 dominerer enhver test som er avhengig av Y. Dette er ikke tilfelle, noe som fölger lett av at φ_0 ikke er OAS:

Velg et alternativpunkt $(\mu_1, \tau_1, \sigma_1) = \theta_1$. Det finnes nå en sterkeste test mot θ_1 (φ) (, som altså er forskjellig fra φ_0. For nivå $\varepsilon < \frac{1}{2}$ svarer den til formen $\Sigma (X_i - a)^2 \leq b$. For $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ blir den også forskjellig fra φ_0). Vi har at

$$E_{\theta_1} \varphi > E_{\theta_1} \varphi_0 .$$

La nå ψ være en test avhengig av Y (la f. eks. ψ være en Fishertest som forkaster når $\frac{Y}{X} > k$) som holder nivå for hypotesen i VKM (Fishertesten vil holde nivå for $\tau > \sigma$ og er konstant i μ).

La nå $\quad \gamma = (1-\alpha)\varphi + \alpha \psi, \quad \alpha \in \langle 0,1 \rangle$.
γ avhenger av Y og for tilstrekkelig liten α vil

$$E_{\theta_1} \gamma > E_{\theta_1} \varphi_0$$

Da begge styrkefunksjonene er kontinuerlige vil dette holde også i en omegn om θ_1

3.6 Eksempel Variantskomponentmodell med 3 komponenter.

$$X_{ijk} = \mu + A_i + B_{ij} + U_{ijk}$$

der $i = 1,\dots,a$, $j = 1,\dots,b$, $k = 1,\dots,n$.
Alle variable A_i, B_{ij}, U_{ijk} er uavhengige normale med forventning null og
$\operatorname{var} A_i = \sigma_A^2$ $\operatorname{var} B_{ij} = \sigma_B^2$, $\operatorname{var} U_{ijk} = \sigma^2$

Eksempelvis kan A_i betraktes som effekt av råmateriale, B_{ij} j-te utvalg laget av i-te utvalg av råmateriale og U_{ijk} er målefeil på den enkelte artikkel.

En ortonormal transformasjon[1] gir oss variable Z_{ijk} med tetthet

$$\text{konstant}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(\sigma^2+n\sigma_B^2+bn\sigma_A^2)}\left[(Z_{111}-\sqrt{abn}\,\mu)^2+\sum_{i=2}^{a} Z_{i11}^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{-1}{2(\sigma^2+n\sigma_B^2)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=2}^{b} Z_{ij1} + \frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=2}^{n} Z_{ijk}^2\right\}$$

Vi skal teste
$$\mu \le 0 \text{ mot } \mu > 0$$

[1] Lehman, 1959, kap 7.8 s 290.

La parameterrommet omfatte $\sigma = 0$, og $\sigma_B = 0$.
Testproblemet er invariant overfor en multiplikasjon av en og samme konstant (>0)

Maksimalinvariant observator er

$$\left\{ \frac{Z_{111}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{a} Z_{i11}^2}} ,\ \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=2}^{b} Z_{ij1}^2}{\sum_{i=2}^{a} Z_{i11}^2} ,\ \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=2}^{n} Z_{ijk}^2}{\sum_{i=2}^{a} Z_{i11}^2} \right\}$$

som vi kaller (U, V, W).

la $\mu' = \dfrac{\sqrt{abn}\,\mu}{\sqrt{\sigma^2 + n\sigma_B^2 + bn\sigma_A^2}}$.

Som i VKM finner vi at den OASS testen, som forkaster når $U > k$ blir entydig maksimin-test for $\mu' \leq 0$ mot $\mu \geq K$.
Helt tilsvarende som i VKM blir envelopen bare avhengig av μ', så den OASS blir mest stringent.

3.7 Eksempel

La $X_1 \ldots X_n$ uavhengige $N(\xi, \tau)$

Vi skal teste

$$\tau \geqslant \tau_0 \quad \text{mot} \quad \tau < \tau_0$$

Når vi dessuten vet at $\xi \geqslant 0$

Envelopefunksjon:
I Lehman 1959, kap 3.9 s 95 finner en den sterkeste testen for $\tau \geqslant \tau_0$, $\xi \in \mathbb{R}$ mot (τ, ξ_1) ved å se på delproblemet

$$(\tau_0, \xi_1) \quad \text{mot} \quad (\tau_1, \xi_1)$$

Den sterkeste testen for dette problemet forkaster når $\Sigma(X_i - \xi_1)^2 \leq K$. Den holder nivå for $\tau \geqslant \tau_0$, $\xi \in \mathbb{R}$ og er derfor sterkeste test, også om $\xi \geqslant 0$ apriori.
I tilfellet $\xi \in \mathbb{R}$ er hypoteseprøvingsituasjonen invariant overfor addisjon av konstant, maksimal-invariant parameterfunksjon er τ, så envelopen avhenger bare av τ.
Derfor vil envelopen i det ikke invariante tilfelle $(\xi \geqslant 0)$ bare avhenge av τ.
Testen som forkaster når $\Sigma(X_i - \bar{X})^2 \leq C$ er i begge tilfelle OASS, og for $\xi \in \mathbb{R}$ OASI. Den blir maksimin overfor alternativer $\tau = \tau_1$ $\xi \in \mathbb{R}$, og derfor mest stringent når $\xi \in \mathbb{R}$. Men i

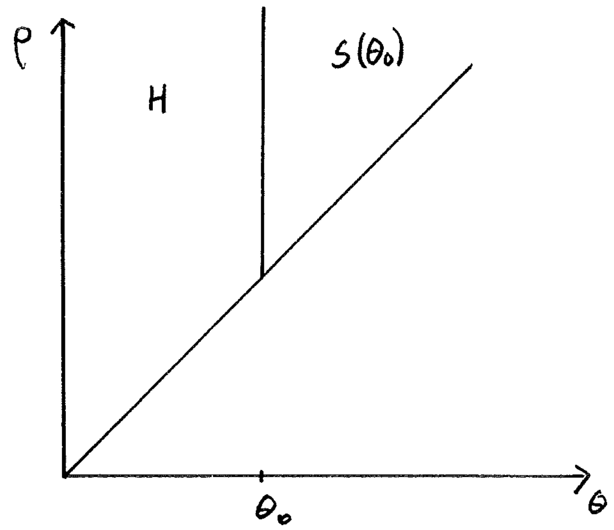
motsetning til VKM kan vi ikke slutte at OASS er maksimin mot $\tau = \tau_1$, $S \geq 0$, da vi ikke har noe felles ω_1-område (fra setning 1) for de to situasjonene $S \in R$ og $S \geq 0$.

3.8 Eksempel. Poissonfordelingen.

La $X \sim po(\theta)$ og $Y \sim po(\rho)$ være uavhengige (poissonfordelte). La $\theta \leq \rho$.
Vi skal teste

$$\theta \leq \theta_0 \text{ mot } \theta > \theta_0$$

Det følger direkte av setning 2 (iii) at testen som forkaster når $X > k$ er OAS, da alternativet er lik $S(\theta_0)$. (Eksempelet er spesialtilfelle av eksempel 3.1.)



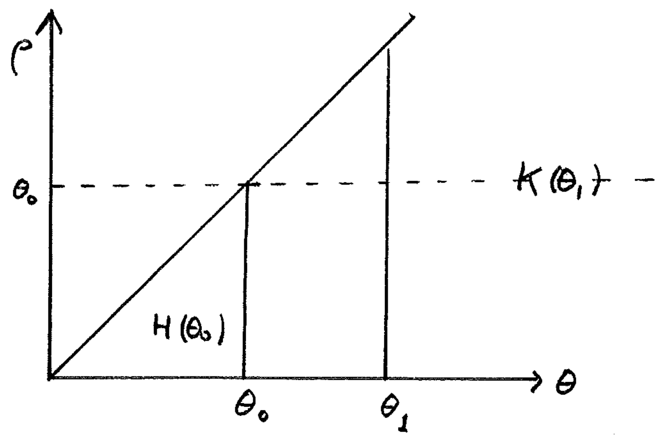
Else Sandved, 1967, bruker dette eksempelet (i en litt annen formulering) til å kritisere styrkeretthetsprinsippet, da OASS test (som altså forkaster når $X > k$) er uavhengig av Y, som ikke er "ancillær". (en størrelse er anciller hvis den ikke gir noe "informasjon" (om en parameter))

Vårt eksempel viser at testen som forkaster når $X > k$ er OAS, vi kan derfor bare svekke styrken ved å ta med Y.

KAP. 4 TESTER SPESIELT TILPASSET EN SITUASJON MED INNSKRENKET PARAMETERROM, EKSEMPLER

4.1 Betrakt poissoneksempelet, $X \sim po(\theta)$, $Y \sim po(\rho)$, men med parameterordningen snudd, vi har $\theta \geq \rho$

Vi skal teste hypotesen $\theta \leq \theta_0$. $(H(\theta_0))$.



Da X er suffisient (for θ) for fast ρ, og fordelingen til X bare avhenger av θ, får vi fra setning 2 (iii) og (iv):

For å teste $H(\theta_0)$ mot alternativer med $\rho \leq \theta_0$ er testen som forkaster når $X > k$ OAS, og den er entydig. Likeledes er samme test entydig maksimintest for $H(\theta_0)$ mot $K(\theta_1)$.

For alternativer med $\rho > \theta_0$ gir ikke setning 2 noen konklusjon.

Vi skal nå gi et eksempel på en test som har større styrke enn den X' baserte testen her, og som dessuten er en maksimintest.

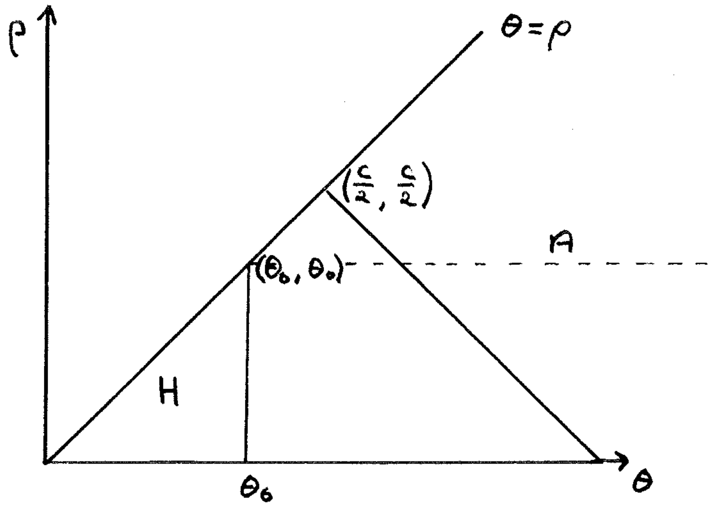
Maksiminløsninger er naturligvis helt avhengig av valg av alternativområde.

Velg nå et alternativområde

$$A = \{(\theta, \rho) \mid \theta \geq \rho \ , \ \theta + \rho \geq c\}$$

Vi skal teste

$H(\theta_0)$ mot A



Betrakt delproblemet

$$(\theta_0, \theta_0) \text{ mot } \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Overfor denne dikotomien er $X+Y$ suffisient (se eksempel 3.2). Den sterkeste testen forkaster når $X+Y > k$. Nå er $X+Y \sim po(\theta+\rho)$ så styrken er konstant for $\theta+\rho = t$ for hver t, og da poissonfordelingen har voksende sannsynlighetskvote er den voksende i t. Testen vil derfor holde nivå på H og anta sin minste styrke i A i $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Testen er derfor (setning 1) maksiminløsning, og entydig så langt Neuman-Pearson konstruksjonen for dikotomien er det.

Langs linja $\theta = \rho$ representerer denne testen envelopefunksjonen. Testen er dessuten uavhengig av det spesielle valg av c.

Vi ser at det er helt nödvendig at $\theta \geq \rho$. For parameterpunkter (utenom modellen) med $\rho > \theta$, $\theta \leq \theta_0$ har testen vilkårlig store styrker.

[Imidlertid vil vi få samme (med nivåjustering) type test for alle apriori situasjoner med $\theta \geq a\rho$, $a \in \langle 0, \infty \rangle$, om begrensningen på alternativet fortsatt var $\theta + \rho = c$. Vi kan nemlig alltid velge en dikotomi på linja $\theta = a\rho$, og der er $X+Y$ suffisient. Hvis a er liten vil $S(\theta_0)$ utgjöre det "meste" av alternativet (i grensen når $a \to 0$ vil $S(\theta_0)$ utgjöre hele alternativet). Hvis $a \to \infty$ vil $X+Y$'testens styrke konvergere mot den X'baserte styrke, da $\rho \to 0$ for fast θ.]

Vi skal sammenlikne de to testene vi nå har, idet vi skal teste hypotesen $\theta \leq 1$.

I tabellen er nivået 0.0527.

Tallene nederst er styrken til den X'baserte testen, $P_\theta(X > 3) + 0.3644 \cdot P_\theta(X = 3)$

Tallene i matrisen er styrken til testen som baseres på $X+Y$, $P_{\theta+\rho}(X+Y \geq 5)$.

7															.9982
6.5														.9963	
6													.9924		
5.5												.9849			
5											.9707				
4.5										.9450	.9597				
4									.9004	.9256					
3.5								.8270	.8679						
3							.7149	.7763							
2.5						.5595	.6429								
2					.3712	.4679									
1.5				.1847	.2746										
1			.0527	.1088											
0.5		.0037	.0186												
		.0022	.0527	.1114	.2086	.3203	.4344	.5420	.6377	.7192	.7861	.8396	.8813	.9132	.9373
ρ/θ		0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7

Tabellverk: Uten oppgitt forfatter (1962)

Da styrken til $X+Y$-testen er konstant på nedadgående diagonaler fra venstre mot høyre i matrisen ($\theta + \rho$ konstant), finner vi lett styrkene i hele matrisen. Det skraverte området er det der den X' baserte testen er best. Dette området må ifølge setning 2 omfatte hele $S(\theta_0)$ ($\theta_0 = 1$), men her omfatter det lite utenom. $X+Y$-testen er derfor et bra alternativ fremfor OASS test, hvis man er interessert i den øvre del del av alternativet. (OASS test er lik X-testen).

Til tross for at $X+Y$-testen er sterkere nær $S(1)$, må X-testen være strengt bedre i hele $S(1)$. Det følger av setning 2:

OAS test for $H(\theta_0)$ mot $S(\theta_0)$ var entydig ($\varphi(X)$). Hvis derfor en annen test $t(W)$ er slik at

$$E_{\theta_1 \rho_1} t(W) = E_{\theta_1} \varphi(X) \quad \text{for en } (\theta_1, \rho_1) \in S(\theta_0)$$

må

$$t(W) = \varphi(X(W)) \quad \text{n.o} \quad \text{m.h.p det}$$

dominerende målet (utenom event randomisering). Skal derfor $t(W)$ ha større styrke enn $\varphi(X)$ for noen parameterpunkter i $\Omega \setminus (H(\theta_0) \cup S(\theta_0))$, må den ha styrke ekte mindre i hele $S(\theta_0)$.

4.2 VARIANSKOMPONENTMODELLEN NOK EN GANG.

Vi fant i eksempel 3.5 at den OASS test φ_0, når vi lot modellen omfatte randområdet $\sigma = 0$, også var maksimintest og mest stringent test for å teste $\mu \leq 0$.

Vi skal nå gå den motsatte vei; å isolere modellen fra randområdet $\sigma = 0$.

La modellen være slik at

$$(1) \qquad \frac{\sigma}{\tau} \in [\sqrt{a}, 1] \;, \quad a > 0 \;.$$

A. Betrakt observatoren

$$\frac{Z}{\sqrt{X + \frac{Y}{a}}} = \frac{\frac{Z}{\tau}}{\sqrt{\frac{X}{\tau^2} + \frac{Y}{\tau^2 a}}}$$

For $\delta^2 = \frac{\sigma^2}{\tau^2} = a$ vil den (på konstant nær) være t-fordelt med $n+m$ frihetsgrader; den har sentral fordeling for $\mu' = 0$. ($\mu' = \frac{\mu}{\tau}$)

Dessuten vil, for hver μ':

$$\sup_{\delta^2 \in [a,1]} \Pr\left(\frac{Z}{\sqrt{X + \frac{Y}{a}}} > k\right) = \sup_{\delta^2 \in [a,1]} \Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X' + Y'\frac{\delta^2}{a}}} > k\right) =$$

$$= \Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X' + Y'}} > k\right)$$

der $Z' = \frac{Z}{\tau}$ osv.

Testen φ_a som forkaster når

$$(2) \qquad \frac{Z}{\sqrt{X + \frac{Y}{a}}} > k$$

vil derfor holde nivå (for $\delta^2 \in [a, 1]$) hvis $\frac{k}{\sqrt{n+m}}$ er $1-\varepsilon$ fraktilen i t-fordelingen med $n+m$ frihetsgrader.

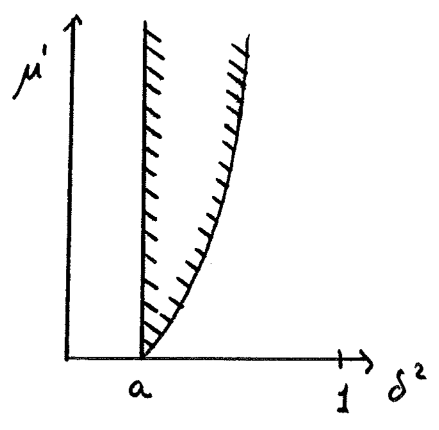
φ_a har större styrke enn φ_0 langs $\delta^2 = a$ og p.g.a kontinuiteten av styrkefunksjonen vil dette gjelde også på et område utenom $\delta^2 = a$.

Dette området er avgrenset av de (μ', δ^2) som tilfredsstiller

$$(3) \quad Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > k_0\right) = Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'}} > k\sqrt{1 + \frac{Y'}{X'}\frac{\delta^2}{a}}\right).$$

Lar vi δ^2 få variere i $[a, \infty\rangle$ har denne relasjonen en og bare en lösning δ^2 for hver μ'. Dette fölger av at for $\delta^2 = a$ er $E\varphi_a > E\varphi_0$ og at $E\varphi \underset{\delta^2 \to \infty}{\longrightarrow} 0$ monotont.

Vi skal siden se mere på numerisk beregning av dette området, men det vil typisk se slik ut:

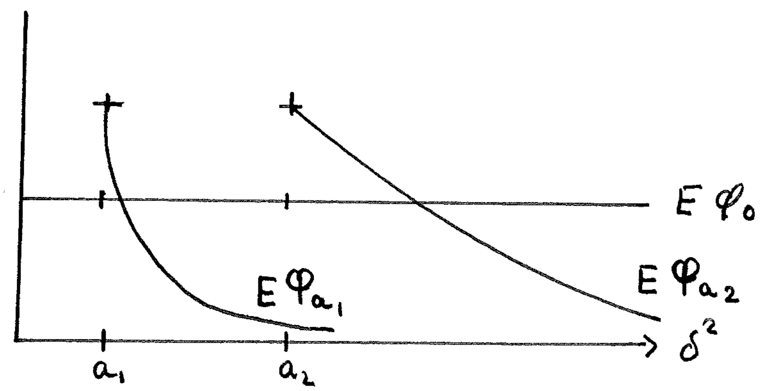


Nå er (3) ikke bare en likning i δ^2 for fast a, men en likning i forholdet $\frac{\delta^2}{a}$; for hver μ' bestemmes et forhold $\frac{\delta^2}{a}$.

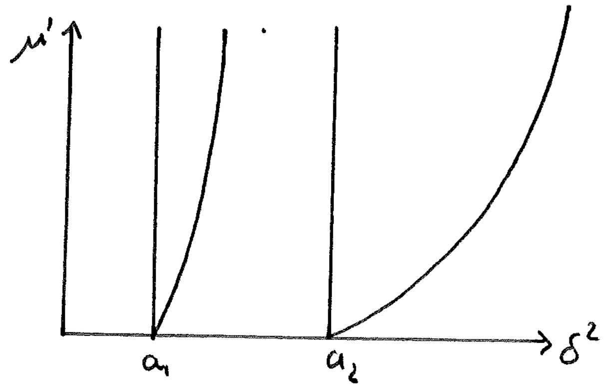
Ved så å fastsette bestemte a'er i bestemte testsituasjoner er det derfor bare kurvens skala som forandres, formen er den samme.

Hvis $a_1 < a_2$ vil $\frac{\delta^2}{a_1}$ gjennomløpe et større område enn $\frac{\delta^2}{a_2}$ når δ^2 går fra henholdsvis a_1 og a_2 til 1.

For fast $\mu' > 0$ vil derfor styrkefunksjonene for $\varphi_0, \psi_{a_1}, \psi_{a_2}$ se slik ut:



Områdene der henholdsvis φ_{a_1} og φ_{a_2} er bedre enn φ_0 vil da se slik ut:



For å finne styrken til φ_a er det nok å lage en tabell over

$$Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'+Y'f}}\sqrt{n+m} > c\right)$$

i eksenterparameteren μ' og $f \geq 1$.

Styrken til φ_a finner vi ved å erstatte f med $\frac{\delta^2}{a}$.

c er $1-\varepsilon$ fraktilen i t-fordelingen med $n+m$ frihetsgrader. Da vil testen holde nivå for $\delta^2 \geq a$ (observatoren er t-fordelt for $f = 1$).

Vi skal se at det er mulig å finne et eksakt utrykk for denne sannsynligheten ved en rekkeutvikling. Ved numerisk beregning, der vi kun tar med et endelig antall ledd, får vi da en nedre grense. Vi skal så gi en øvre grense, som er spesielt lett å beregne. Ved derfor først å regne ut denne, kan en finne det største område (i μ' og f) en kan vente forbedring i fremfor φ_0. Derpå finner vi styrken i dette området (dette er langt mere arbeidskrevende).

B. φ_a er maksimintest.

Vi har under punkt A foreslått φ_a som en invariant[1] test, da den forkaster når

$$\frac{Z}{\sqrt{X}} > k\sqrt{1+\frac{Y}{X}\frac{1}{a}}\ .$$

Vi skal nå se at φ_a er entydig maksimintest basert på de opprinnelige observasjonene (Z, X, Y).

Det apriori parameterrom er

$$\mu \in \mathbb{R}\,,\quad \sigma/\tau \in [\sqrt{a}, 1]\,,\ \text{der } a>0\ .$$

Vi skal teste hypotesen

(4) $$\mu \le 0\,,\quad \sigma/\tau \in [\sqrt{a}, 1]$$

mot følgende alternativ:

Betrakt $E\varphi_a$. Velg et tall $t \in \langle \varepsilon, 1\rangle$. Da vil ligningen $E\varphi_a = t$ definere en hyperflate i parameterrommet. Den vil gå igjennom linjen

$$\frac{\mu}{\tau} = c\,,\quad \frac{\sigma}{\tau} = \sqrt{a}\quad \text{for en } c>0\ .$$

Velg et alternativområde som ligger over denne flaten, (Alternativet har da større μ-verdier enn flaten har

[1] Hypoteseprøvingssituasjonen er fortsatt invariant overfor multiplikasjon med en konstant

til samme $(\tau, 6)$) og som dessuten omfatter linja $\frac{\mu}{\tau} = c$, $\frac{6}{\tau} = \sqrt{a}$.

Betrakt nå delproblemet av (4)

(5) $\mu = 0$, $\frac{6}{\tau} = \sqrt{a}$ mot $\frac{\mu}{\tau} = c$, $\frac{6}{\tau} = \sqrt{a}$.

For dette testproblemet er $(Z, X + \frac{Y}{a})$ suffisient. Dessuten kan dette settet betraktes som et suffisient sett observatorer for en følge uavhengige normalfordelte variable. Vi er m.a.o tilbake i situasjonen beskrevet på side 30. Lehman og Stein, 1948, gir oss at φ_a er tillatt for (5). Argumenter, helt like de vi hadde på s 31, ligning (6), (7) (Da φ_a er OASS for (5), og har konstant styrke på alternativet i (5)), gir oss at φ_a er entydig maksimintest for (5).

Vi så i A at φ_a var en test; den holdt nivå på hypotesen i (4). Alternativet er valgt slik at $E\varphi_a$ antar sin minste verdi i alternativet i (5). Det følger da av setning 1 at φ_a er entydig maksimintest.

C. eksakt fordeling

Vi har $X' \sim \chi^2_n$ og $Y' \sim \chi^2_m$ uavhengige.
La $V_f = X' + Y' f$, $f \geq 1$. Vi har $V_1 \sim \chi^2_{n+m}$.

Nå har vi, ifølge Robbins og Pitman 1949, at

$$P(V_f \leq v) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) \cdot F_{n+m+2j}(v)$$

der F_{n+m+2j} er den kumulative χ^2 fordeling med $n+m+2j$ frihetsgrader, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) = 1$, c_j er bestemt av identiteten $(|z| \leq 1)$

$$f^{-\frac{m}{2}} \left[1 - (1 - \tfrac{1}{f}) z\right]^{-\frac{m}{2}} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f)\, z^j .$$

Ved å derivere leddvis i z, og å sette $z=0$ finner vi

$$c_j(f) = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{m}{2}+j-1\right)}{j!} \left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 - \frac{1}{f}\right)^j$$

for $j \geq 1$ og $c_0(f) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{m}{2}}$.
For $m = 2r$ kan vi skrive dette som

$$c_j(f) = \binom{r+j-1}{r-1} \left(\frac{1}{f}\right)^r \left(1 - \frac{1}{f}\right)^j \qquad j \geq 0 ,$$

som vi kjenner igjen som leddene i den negativt binomiske fordeling. Disse er definert også for ν reell, så vi kan skrive

$$c_j(f) = \binom{\frac{m}{2}+j-1}{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{1}{f}\right)^{j} \quad j \geq 0 \quad \forall m$$

Disse er tabellert i Williamson og Bretherton, 1963.

Betrakt nå for $c > 0$

$$Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'+Y'f}} > c\right) = \int Pr\left(\frac{t}{\sqrt{X'+Y'f}} > c \mid Z'=t\right) dPZ'^{-1}(t) =$$

$$= \int_0^\infty Pr\left(\frac{t}{\sqrt{X'+Y'f}} > c\right) dPZ'^{-1}(t) = \int_0^\infty Pr\left(X'+Y'f < \frac{t^2}{c^2}\right) dPZ'^{-1}(t) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty c_j(f)\, F_{n+m+2j}\left(\frac{t^2}{c^2}\right) dPZ'^{-1}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty c_j(f) \int_0^\infty F_{n+m+2j}\left(\frac{t^2}{c^2}\right) dPZ'^{-1}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty c_j(f)\; Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{V_j'}} > c\right), \text{ der } V_j' \sim \chi^2_{n+m+2j}.$$

(Vi har at F er simultant målbar i j og t m.h.p. produktmålet, så vi kan anvende Fubinis teorem).

Vi får styrken som en veiet sum av ikkesentrale t-fordelinger. Disse er spesielt godt tabellert i Locks, Alexander og Byars, 1963.

Ved numerisk beregning kan man ta med så mange ledd at en får en viss prosent av c_j'ene. Da $Pr(\frac{Z'}{\sqrt{V_j'}} > c)$ er avtakende i j får vi et bra anslag på feilen ved å ta den første $Pr(\frac{Z'}{\sqrt{V_j'}} > c)$ som ikke summeres med å multiplisere med restsummen av c_j' ene (anslaget avhenger også av eksenterparameteren).

D. En övre grense.

Ifölge Okamoto, 1959, er

$$Pr(X' + Y'f < c) \leq Pr(f^{\frac{m}{n+m}} \cdot V_1 < c)$$

der $V_1 \sim \chi^2_{n+m}$.

På samme måte som i C finner vi da

$$Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X' + Y'f}} > c\right) = \int_0^\infty Pr\left(X' + Y'f < \frac{t^2}{c^2}\right) dPZ'^{-1}(t) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty Pr\left(V_1 < \frac{t^2}{c^2 (f)^{\frac{m}{n+m}}}\right) dPZ'^{-1}(t) =$$

$$= Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{V_1}} > c\, f^{\frac{m}{(n+m)2}}\right)$$

Vi har dermed en övre grense som er tabellert i tabell over ikkesentrale kumulative t-fordelinger

E. Et talleksempel

La nivået være 0.05. La $m = 8$, $n = 4$. Disse verdiene er valgt ut fra tabellmessige hensyn; vi skal ha t-fordelinger med $m+n+2j$ frihetsgrader.

I en praktisk anvendelse er disse tallene for små, og svarer dessuten ikke til like mange observasjoner i hver gruppe; noe som vi må ha for at både X og Y skal ha sentral χ^2.

Den OASS (φ_0) består nå i å forkaste hypotesen $\mu \leq 0$ når $\frac{Z}{\sqrt{X}}\sqrt{4} > 2.1318$.

Vi skal sammenlikne dennes styrke med

$$Pr\left(\frac{Z'}{\sqrt{X'+Y'f}}\sqrt{12} > 1.7823\right)$$

når f varierer, $f \geq 1$.

Merk: i den kumulative tabellen har en kun skritt på 0.2 (så 2.1318, 1,7823 står ikke) Jeg har nyttett lineær interpolering til å finne melloмliggende verdier. I tabellen er også eksenterparameteren gitt via frihetsgradene: for å få samme eksenterparameter har jeg også her nyttet lineær interpolasjon.

μ'	$E_{\mu'}\varphi_0$	$f=1.030$ maks	$f=1.190$ min	$f=1.413$ min	$f=1.413$ maks	$f=1.881$ min	$f=1.881$ maks	$f=2.442$ maks	$f=3.104$ maks	$E_{\mu'}\varphi_0$	μ'
0.00	.0500	.0485	.0417	.0332	.0343	.0205	.0241			.0500	0.00
0.56	.1207	.1485	.1348	.1160		.0842				.1207	0.56
1.12	.2397	.2841	.2560	.2192	.2318	.1578				.2397	1.12
1.68	.4015	.4775	.4437	.3996	.4059	.3112				.4015	1.68
2.24	.5799	.6604	.6263	.5804	.5959	.4821				.5799	2.24
2.80	.7412	.8281	.7977	.7544	.7751	.6499	.7166			.7412	2.80
3.35	.8613	.9175	.8995	.8763	.8861	.7901	.8477			.8613	3.35
3.91	.9357	.9706	.9575	.9366	.9548	.8703	.9377			.9357	3.91
4.47	.9743	.9933	.9806	.9612	.9883	.8949	.9805			.9743	4.47
5.03	.9912	.9977	.9909	.9825	.9957	.9322	.9924	.9870		.9912	5.03
5.59	.9974	.9998	.9951		.9994	.9676	.9987			.9974	5.59
6.15	.9994				.9999		.9996			.9994	6.15
6.31	.9998				1.		1.	.9999	.9995	.9998	6.31

Forklaring til tabellen.

μ er eksenterparameteren. Tallene under "maks" er

$$Pr\left(\frac{z'}{\sqrt{V_1}}\sqrt{12} > 1.7823\, f^{\frac{8}{24}}\right).$$

For $f = 1.030$ er dette også tilnærmet den maksimale styrke vi kan få (som inntreffer for $f = 1$).

$f = 1.190$, min. Her har vi summert fra $j = 0$ til 4 og fått med 99.61 % av c_j leddene. Tallene er altså høyst 0.0039 for små, størst for de store tallene.

$f = 1.413$, min. Målt i % av Σc_j er 94.2% av leddene med, de neste 5.7 % er multiplisert med minste t-sannsynlighet svarende til disse og resten er utelatt.

$f = 1.8801$, min. Her er tilsvarende prosenter 68% og 30%. Resten er utelatt.

Eksempler på bruk av tabellen.

Anta vi apriori har funnet at $\delta^2 \in [0{,}1, 1]$.

Da vil $\varphi_{0,1}$ ha større styrke enn φ_0 for $\delta^2 \in [0{,}1, 0{,}14]$ $(f \in [1, 1.4))$ (si)

Varierer $\delta^2 \in [0{,}5, 1]$ får vi derimot styrkeøkning for $\delta^2 \in [0{,}5, 0.7]$ (si)

Har vi et liknende eksperiment der $\delta^2 \in [2, 3]$ får vi økt styrke utover OASS i nesten hele

parameterområdet.
Vanligvis (i varianskomponentmodeller) vil m (lik antall observasjoner minus antall grupper) og n (antall grupper minus én) være langt større, og også vil forholdet m/n være større (her 2). Da kan en regne med betydeligere forbedring, både i styrke differens og i større område (målt i f).

Problemet med å bruke testen φ_a i praksis vil være å finne nedre grense for $\frac{\sigma}{\tau}$. a bør være så stor som mulig, ut fra styrkehensyn, på den andre side skal modellen mest mulig korrekt gjengi virkeligheten.

Dette problemet, som går ut over denne oppgaven, er det en altid har når en påstår at en parameter svarende til en målt størrelse, er lik et bestemt tall eller har visse begrensninger. (at $\delta^2 \leq 1$ vet vi derimot sikkert fra teorien) Et slikt utsagn vil måtte bygge på erfaring og er således stokastisk. En kunne tenke seg at man observerte varepartier over lang tid, og på det grunnlag bestemte en nedre grense. En får da en betinget test, gitt erfaring opp til nå. Destobedre å ha en teori som fastslår en nedre grense.

kap 5. SLUTTORD.

I denne oppgaven har vi sett på endel situasjoner der parametrene ikke har variert fritt, men har vært beskranket enten av hverandre eller av konstanter.

I kap 2. har vi gitt endel resultater, som en ikke så oppsiktsvekkende i seg selv, men de gir uventede konklusjoner i forbindelse med apriori binding.

Eksempel 3.4 og 4.2 belyser varians-komponentmodellen, ut fra hver sin filosofi. Det var små varianser som gav oss problemer; så i 3.4 lar vi modellen omfatte nedre grense, i 4.2 isolerer vi modellen fra denne. Det var tilstrekkelig for å gi resultater i begge tilfeller.

Det er flere ting som her kunne vært behandlet, men som ikke er tatt med, eksempelvis:

(i.) Gi en mere omfattende tabellering av styrkefunksjonen fra 4.2 i μ og f, for flere frihetsgrader.

(ii.) Sannsynlighetskvotetesten. Denne tar jo nettopp vare på parameterstrukturen, men blir lett "stygg" og en må nøye seg med å finne asymptotisk styrke.

(iii) Eksemplene 3.8 og 4.1 dekker hypoteseprøving i hver sin del av et parameterrom $\{\theta \geq 0, \rho \geq 0\}$. I 3.8 fant vi at OASS test også var OAS, i 4.1 fant vi en test som er et bra alternativ til OASS test. Tester vi istedet $\theta \geq \theta_0$, vil situasjonen bli motsatt: i 4.1 vil nå OASS test også bli OAS, mens i 3.8 vil en kunne bruke en tilsvarende test som i 4.1 (Forkast hvis $X+Y<k$). Vil en alltid få lignende resultater, og hva må til for at dette skal/skal ikke gå?

REFERANSER

Ferguson, T. (1967): Mathematical statistics. A decition theoretic approach. Academic Press, New York and London.

Frazer, D.A.S (1956): Sufficient statistics with nuisance parameters, The Annals of Mathematical Statistics, **27** : s 838-842.

Lehman, E.L (1959): Testing Statistical Hypotheses. Wiley, New York. 5.te utgave.

Lehman & Stein (1948) Most powerful tests of composite hypotheses. I. normal distribution, The Annals of Mathematical Statistics, **19** s 495-516.

Lehman & Stein (1953) The admissibility of certain invariant statistical tests involving a translation parameter, The Annals of Mathematical Statistics, **24** s 473-479.

Locks, M. O & Alexander, M. J & Byars, B. J. (1963): New tabels of the noncentral t distribution, Aeronautical Research Labratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force.

Okamoto, M (1959): An inequality for the weighted sum of χ^2 variates, Bulletin of mathematical statistics **9** (1960) s 69-70.

Robbins, H & Pitman, E. J. G (1949): Application of the method of mixtures to quadratic forms in normal variates, The Annals of Mathematical Statistics **20** s 552 - 560.

Ruist. E (1954): Comparison of tests for non-parametric hypotheses, Arkiv Mat, **3** s 133-163.

Sandved. E (1967): Ancillary statistics in models without and with nuicans parameters. Statistical Research Report **5** University of Oslo.

Svedrup, E (1964): Lov og tilfeldighet II
Universitetsforlaget, Oslo.

Williamson, E & Bretherton, M. H (1963)
Tabels of the negative Binomial Probability Distribution, Wiley, London New York.

Uten oppgitt forfatter: (1962) Tabels of the induvidual and cumulative terms of Poisson distibution. Defense systems dep. General Electric Company. Van Norstrand.

D. Mest stringent test i VKM.

Vi fant i forrige avsnitt at envelopen bare avhang av (μ, τ, σ) via parameterfunksjonen $\mu' = \frac{\mu}{\tau}$.

Vi har dessuten vist at φ_0, som forkaster når $Z/\sqrt{X} > k$ er maksimin-test for

$$\mu \leq 0,\ \tau \geq \sigma \quad \text{mot} \quad \frac{\mu}{\tau} = K,\ \tau \geq \sigma,$$

og dette gjelder for alle $K > 0$, da φ_0 er uavhengig av K. Da $\frac{\mu}{\tau} = K,\ \tau \geq \sigma$ er en kontur til envelopefunksjonen, er φ_0 mest stringent test (Lehman, 1959, kap 8.5 s 339-340).

Hvis maksimintesten og envelopen i et fullt og et innskrenket parameterrom blir de samme, fordi de er konstruert ut fra felles ω_0 og ω_1 områder, kan vi bruke invariansen i det fulle parameterrommet til å finne mest stringent test slik vi har gjort det her.

D. Mest stringent test i VKM.

Vi fant i forrige avsnitt at envelopen bare avhang av (μ, τ, σ) via parameterfunksjonen $\mu' = \frac{\mu}{\tau}$.

Vi har dessuten vist at φ_0, som forkaster når $Z/\sqrt{X} > k$ er maksimintest for

$$\mu \leq 0, \tau \geq \sigma \quad \text{mot} \quad \frac{\mu}{\tau} = K, \tau \geq \sigma,$$

og dette gjelder for alle $K > 0$, da φ_0 er uavhengig av K. Da $\frac{\mu}{\tau} = K, \tau \geq \sigma$ er en kontur til envelopefunksjonen, er φ_0 mest stringent test (Lehman, 1959, kap 8.5 s 339-340).

Hvis maksimintesten og envelopen i et fullt og et innskrenket parameterom blir de samme, fordi de er konstruert ut fra felles ω_0 og ω områder, kan vi bruke invariansen i det fulle parameterrommet til å finne mest stringent test slik vi har gjort det her.