Høgskolen i Hedmark

LUNA

Philip Kristiansen

Bacheloroppgave

Misoppfatninger rundt brøkbegrepet og regning med brøk i barneskolen

Common misconceptions regarding fractions in primary school

Grunnskolelærerutdanning 1-7 2013

2016

Samtykker til utlån hos høgskolebiblioteket	JA ☒	NEI ☐
Samtykker til tilgjengeliggjøring i digitalt arkiv Brage	JA ☒	NEI ☐

Norsk sammendrag

Tittel: Misoppfatninger rundt brøkbegrepet og regning med brøk	
Forfatter: Philip Kristiansen	
År: 2016	**Sider:** 31
Emneord: Misoppfatninger, brøk, diagnostiske oppgaver	
Sammendrag: Denne studien omhandler hvilke misoppfatninger som finnes når det gjelder brøkbegrepet og regning med brøk. Oppgavens problemstilling er *Hvilke misoppfatninger finnes rundt brøkbegrepet og regning med brøk i en 7. klasse?* Denne problemstillingen belyses av teori som referer til Gard Brekke, Gunn Imsen og Alistair McIntosh. Teorien omfatter blant annet misforståelser, forståelse av brøkbegrepet, regning med brøk, og konstruktivisme. I denne studien brukes en kvalitativ forskningstilnærming. Det blir gjort semistrukturerte intervjuer av tre elever på en middels stor skole på Østlandet. Innsamlingen av data ble gjort på innenfor en tidsperiode på 14 dager. Dataene ble deretter analysert og drøftet. I drøftningsdelen blir det gjort interessante funn som bekrefter eller avkrefter misoppfatninger hos informantene.	

Engelsk sammendrag (abstract)

Title: Common misconceptions regarding fractions in primary school	
Author: Philip Kristiansen	
Year: 2016	**Pages:** 31
Key words: Misconceptions, fractions, diagnostic tasks	

Summary:

This study is on misconceptions regarding fractions. More precisely, it sets out to find misconceptions in regards to the concept of fractions, and misconceptions when calculating fractions in a year 7 class. I refer to Gard Brekke, Gunn Imsen and Alistair McIntosh when I present theory on misunderstandings, understanding of the concept of fractions, calculating with fractions, and constructivism. The study uses a qualitative approach to research. I have done semi-structured interviews of three pupils in a medium size school in the eastern part of Norway. The collection of data was done over the course of two weeks. The data was analyzed and discussed. In the discussion, I find interesting findings that confirm or refute misconceptions among the pupils.

Forord

Denne bacheloroppgaven er en avsluttende oppgave for faget Pedagogikk og elevkunnskap for Grunnskolelærerutdanning 1-7 ved Høgskolen i Hedmark avdeling Hamar. Faget matematikk har alltid interessert meg, og gitt meg mye glede i skolegangen. Denne oppfatningen av faget har jeg dessverre ikke delt med mange medelever oppgjennom mine år som elev i grunnskolen. For å unngå at elever sitter med denne oppfatningen av matematikk er vanskelig og kjedelig må elevene forstå matematikk. For at elevene skal forstå matematikk må vi som lærere skjønne elevenes tankegang sånn at vi sammen kan komme frem til en løsning. På bakgrunn av dette var valget meget enkelt for meg da jeg skulle velge hvilket fag jeg ville bygge bacheloren min på. Innenfor matematikk er det mange misoppfatninger og misforståelser, men som de sier må vi redde skogene ett tre av gangen. Treet jeg ville redde, eller i hvert fall å vanne litt, med denne oppgaven er misoppfatninger innenfor brøkbegrepet og regning med brøk.

Jeg vil få rette en takk til min veileder, Per Storfossen, som har vært til hjelp og bistått med rask og god veiledning da dette har vært nødvendig. Jeg vil også rette en takk til mine informanter, deres foresatte og skolen i Hedmark. Dere har gjort studien mulig.

Hamar 20.05.2016

Philip Kristiansen

Innhold

1. Innledning

Jeg har valgt å skrive bacheloroppgave om misoppfatninger rundt regning med brøk i barneskolen. En misoppfatning er definert i denne oppgaven som en bestemt tanke og fremgangsmåte som ligger hos eleven. Denne tanken brukes konsekvent for å finne svaret på en type oppgave. Bakgrunnen til at jeg valgte på nettopp dette emnet er personlige erfaringer jeg har gjort som bekrefter at misoppfatninger rundt regning med brøk eksisterer. I tillegg skriver utdanningsdirektoratet i sin veiledning til læreplan i matematikk at lærere i ungdomsskolen melder om at elever viser manglende forståelse rundt selve brøkbegrepet og også regning med brøk. I læreplanen for matematikk etter 7. trinn i kunnskapsløftet står det ”Mål for opplæringa er at eleven skal kunne beskrive og bruke plassverdisystemet for desimaltal, rekne med positive og negative heile tal, desimaltal, brøkar og prosent og plassere dei ulike storleikane på tallina” (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det er dette målet jeg tar utgangspunkt i når jeg gjennomfører denne studien. Jeg vil undersøke misoppfatningene på 7. trinn for å se på hvilke misoppfatninger rundt brøk elevene har med seg fra barneskolen og inn i ungdomskolen. Problemstillingen for denne studien er *Hvilke misoppfatninger rundt brøkbegrepet og regning med brøk finnes i en 7. klasse?*

Jeg har brukt en kvalitativ forskningsmetode for å avdekke hvilke misoppfatninger, eller om det finnes noen misoppfatninger i en 7. klasse på Østlandet. Dette er også en casus-studie da mine funn kun vil vise hva man finner i denne klassen, og ikke hvilke misoppfatninger som for eksempel finnes i Norge. For å finne informanter gjorde jeg en undersøkelse med diagnostiske oppgaver i en hel klasse. Undersøkelsene ble deretter analysert. Analysene viste at det var seks av elevene som var aktuelle for å belyse problemstillingen. Av disse seks elevene var det tre som ga sitt samtykke til å delta i studien. De tre elevene ble mine informanter. Informantene ble så intervjuet, og gav datamaterialet som er grunnlaget for studien. De innsamlede dataene blir drøftet opp mot teori som omhandler misoppfatninger, matematikkforståelse og konstruktivisme.

2. Teori

2.1 Å kunne matematikk

Å kunne matematikk er definert av Brekke (1995) ved hjelp av fem komponenter. Disse fem punktene skaper et bilde av hva eleven bør ha med seg for å utvikle de grunnleggende ferdighetene i matematikk.

2.1.1 Faktakunnskap

Brekke (1995) skriver at det som menes med faktakunnskap er kunnskap om konvensjoner og definisjoner. Innunder dette finner vi for eksempel standardmål. Et annet eksemepel på faktakunnskap er kunnskap om betydningen til plasseringen til tallene. Tallet 5 har forskjellig verdi dersom det er plassert på enerplassen, tierplassen eller hundrerplassen. En konvensjon er for eksempel at multiplikasjon er gjentatt addisjon.

2.1.2 Ferdigheter

Brekke (1995) definerer ferdigheter som veletablerte prosedyrer i flere steg. Disse prosedyrene eller framgangsmåtene bør være automatiserte. Dette gjør at eleven kan fokusere på andre deler av problemet i stedet for å rette oppmerksomheten sin mot valg av fremgangsmåte eller gangen i selve fremgangsmåten. Fremgangsmåtene som er tilknyttet en spesiell type oppgaver danner regler for utregning av akkurat denne typen oppgaver. En ulempe ved dette kan være at elevene blander sammen reglene og bruker regler for å løse oppgaver der de ikke gjelder.

2.1.3 Begrepsstrukturer

Brekke (1995) skriver at:

> Et karakteristisk trekk ved matematiske begreper er at de ikke har vokst fram isolert, men eksisterer i et nettverk av enkelte ideer. Vi kaller slike nettverk av ideer for begrepsstrukturer. Strukturene gjør matematikken meningsfull og støtter opp under ferdighetene. Det at slike strukturer eksisterer, viser seg blant annet ved at en har evne til å rette noe når en har husket feil, og å overføre eller tilpasse prosedyrer en har lært i en sammenheng, til nye situasjoner. (s. 7)

Begrepsstrukturer er altså nettverk av ideer. Disse nettverkene støtter oppunder ferdighetene og gjør matematikken meningsfull.

2.1.4 Generelle strategier

Generelle strategier er korrekt valg av ferdigheter til den gitte oppgaven (Brekke, 1995). Dette innebærer å kunne tolke og kategorisere oppgaven, bevise og kontrollere svar. Et eksempel på dette er når man skal finne fellesnevner i brøkregning. Dersom to brøker med forskjellige nevnere skal adderes må man finne fellesnevne. Hvis de to samme brøkene skal multipliseres trengs ikke denne prosessen for å finne frem til korrekt svar på oppgaven.

2.1.5 Holdninger

Det siste punktet som Brekke (1995) skriver om er holdninger. Holdninger peker her til hvordan vi forholder oss til matematikk. Hvordan læreren underviser matematikk, og hvordan eleven møter matematikk som fag. Denne studien omfatter ikke holdningene lærerne og elevene har til matematikk og blir derfor ikke vektlagt i teoridelen.

2.2 Brøk

Solem, Alseth og Nordberg (2010, s. 85) skriver: “I matematisk forstand er brøk alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall.” I en brøk finner vi tre komponenter. Teller, nevner og brøkstrek. Telleren er tallet over streken, nevneren er tallet under streken, og streken kalles brøkstrek. Videre skriver de at det er flere grunner til at elever har vanskeligheter med å forstå brøk. Brøk øker eller synker ikke med lik verdi dersom man forandrer nevneren i brøken til en mer eller mindre. Fra 4 til 5 på en tallinje er differansen 1, mens mellom $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{5}$ er differansen 0,05, og mellom $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{6}$ er differansen 0,033. Brøk er også en relativ størrelse. Det betyr at størrelsen varierer ut fra hvilket utgangspunkt vi har. $\frac{1}{4}$ av 4 er noe annet enn $\frac{1}{4}$ av 20.

Solem, Alseth og Nordberg (2010) skriver om forskjellige typer regning med brøk. Jeg har brukt noen av dem som utgangspunkt for mine oppgaver.

Brøk som del av en helhet. Her kan man bruke oppgaver som går ut på å vurdere hvor stor del av en figur som er skravert. For eksempel ved hjelp av sektordiagram eller ved å dele opp et rektangel i deler.

Likeverdige brøker. Solem, Alseth og Nordberg (2010) skriver at likeverdige brøker legger grunnlaget for regning med brøk. De viser dette ved hjelp av en tallinje hvor brøkene blir plassert. Det er også mulig å vise det geometrisk ved hjelp av rektangler som deles inn i for eksempel 2, 8 og 16 deler, for så å se at en halv kan skrives på mange måter ved hjelp av brøk. Jeg har videreført dette til forkorting av brøk, da dette er 7. trinnselever.

Addisjon med brøk. Å addere brøker krever at brøkene er likeverdige. Dette betyr at for å addere brøker må delene til den enkelte brøk være like store. Man må finne fellesnevner. Dette gjøres ved å utvide eller forkorte brøkene som skal adderes. Dette er også en videreføring av det Solem, Alseth og Nordberg (2010) skriver om at likeverdige brøker legger grunnlaget for regning med brøk.

Multiplikasjon med brøk. Multiplikasjon med naturlige tall er tillært som en mer krevende prosess enn addisjon. Dette gjelder derimot ikke nødvendigvis for multiplikasjon med brøker. Når man multipliserer brøker multipliseres teller med teller og nevner med nevner.

Brøk som relativ størrelse. Dette handler om å se sammenheng mellom brøk og en mengde. Det er viktig å forstå at en hel ikke alltid er 1. Elevene må forstå at $\frac{3}{4}$ av 20 liter ikke er det samme som $\frac{3}{4}$ av en kake.

2.3 Misoppfatninger

> "Det er viktig å forstå forskjellen på de *feil* elevene gjør, og de *misoppfatninger* de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, fordi en ikke er oppmerksom nok eller ikke leser oppgaven godt nok osv. Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning – en idé – som en bruker nokså konsekvent. Ofte er dette et resultat av en overgeneralisering av tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut. En kan gjerne se på dette som forsøk på å skape mening og sammenheng i det en lærer." (Brekke, 1995, s. 11)

Brekke (1995) skriver at det er viktig å skille mellom feil og misoppfatninger. Misoppfatninger er ikke tilfeldige fremgangsmåter eleven bruker for å løse en type oppgave. Hos eleven ligger det altså en bestemt tanke om hvordan man skal komme frem til et svar. Misoppfatninger skyldes ofte videreføring av tidligere kunnskaper, og at eleven overgeneraliserer tillærte ferdigheter. Det er viktig å få elever til å forstå at ulike tanker og strategier elever har lært innenfor et visst felt ikke nødvendigvis gjelder for et annet. Feil derimot en mer tilfeldig hendelse. Feilen kan komme av at eleven ikke har lest oppgaven godt nok, har slurvet eller lignende.

2.4 Misoppfatninger innenfor brøk

I boken *Alle Teller!* skriver Alistair McIntosh (2007) om forskjellige misoppfatninger innenfor brøk.

McIntosh (2007) skriver at språket vi bruker fører til den vanligste misoppfatningen innenfor brøk. Dette kommer fra måten vi deler for eksempel en pizza på. Dersom pizzaen ikke blir delt i to like store deler vil en av partene ende opp med ”den største halvdelen”. I brøkens verden vil ikke dette være korrekt bruk av begrepet halvdel. En halvdel, altså $\frac{1}{2}$, tilsier at pizzaen er delt opp i to like store deler, og dermed kan ingen få en større halvdel enn noen andre.

Å dele en hel i tredjedeler kan også by på problemer hos elevene. Det er en vanlig misoppfatning at man kan dele et rektangel i to like store deler og deretter dele den ene halvdelen i to igjen. Dette fører til at man har en halv, en kvart og en kvart, altså tre deler. Dette viser at elever ikke har forstått at delene av en brøk skal være like store.

Videre skriver McIntosh (2007) at elevene ofte har misoppfatninger knyttet til størrelsen av brøk sett i forhold til null og en. Ofte tror elever at en brøk med stor nevner er større enn en brøk med liten nevner. Dette kommer av at elevene tidligere har lært at større tall har større verdi. Det forekommer at elever tror at brøk med 9 i nevner er nesten en hel uavhengig av teller. Denne forvirringen kan komme fra at elever som regel lærer om desimaltall samtidig som brøk og forveksler verdiene til en brøk med verdiene til et desimaltall. For eksempel at $\frac{1}{8}$ = 0,8.

Å gjøre brøker likeverdige kan virke unødvendig for elevene. Ofte lærer elevene en regel som de følger uten å se meningen bak det de gjør (McIntosh, 2007). For å addere brøker er dette helt nødvendig å gjøre brøkene likeverdige. Her oppstår det ofte misoppfatninger da dette ikke trengs å gjøres når man adderer desimaltall som man ofte lærer om parallelt med brøk. Det er derfor viktig at elevene lærer seg å se sammenhengen mellom brøker. Da nevneren i to brøker ikke er lik er dette ofte vanskelig. Elever tror ofte at det ikke finnes en brøk mellom $\frac{2}{6}$ og $\frac{3}{6}$. Hvis man utvider brøkene til $\frac{4}{12}$ og $\frac{6}{12}$ vil elevene se at det faktisk er brøker mellom $\frac{2}{6}$ og $\frac{3}{6}$.

2.5 Diagnostiske oppgaver

Prøver i matematikk blir vanligvis brukt til å kartlegge hva eleven har lært av fakta, ferdigheter og begreper. En diagnostisk oppgave er ikke ute etter å rangere elevene eller se på deres læring. Målet med en diagnostisk oppgave beskriver Brekke (1995) med følgende fem punkter:

• å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også uten at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke.

• å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver.

• å rette undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for på den måten å overvinne dem og de delvise begrepene.

• å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier.

• å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.

Jeg har valgt ut oppgaver (vedlegg 1) som beskriver elevenes tankeprosess. Oppgavene gir innsyn i elevenes løsningsstrategier ved at det er like oppgaver som lett viser fremgangsmåtene til elevene og om fremgangsmåten er konsekvent.

2.6 Konstruktivisme

Imsen (1998) skriver om Piagets skjemateori, der barn utvikler og utvider skjemaer etter hvert som de får erfaringer med lærestoffet. Piaget opererer med begrepet endring av kognitive strukturer. Dette dreier seg i all hovedsak om utvikling av skjemaer. Her bruker Piaget begrepene *assimilasjon* og *akkomodasjon*. Assimilasjon er når barnet møter ny kunnskap som passer inn i et allerede eksisterende skjema. Hinna, Rinvold og Gustavsen (2012, s. 775-776) bruker eksempelet at en elev har lært om egenskapene til en firkant, og laget seg et skjema for firkanter. Deretter møter barnet ulike firkanter. De passer alle inn i skjemaet som sier at en firkant har fire hjørner og fire sider. Akkomodasjon er når barnet møter ny kunnskap som ikke umiddelbart passer inn i skjemaet, og skjemaet må endres.

Videre skriver Hinna, Rinvold og Gustavsen om Kari som har lært at når noe er større, har det større verdi. Hun møter en utfordring når hun oppdager at fem-kroningen er større enn ti-kroningen, men samtidig har lavere verdi. Kari må dermed endre skjemaet om verdier – hun akkomoderer skjemaet. Samtidig som Kari skjønner at hun må endre skjemaet, assimileres denne nye kunnskapen inn i det eksisterende skjemaet. Når skjemaene er akkomodert og kunnskapen er assimilert sier Piaget at det er equilibrium, det er likevekt. Søken etter likevekt, orden og å forstå verden rundt oss mener Piaget er menneskets motivasjon for læring. Dette er det vi også kaller for indre motivasjon.

For å lære må kognitive strukturer endres. Mennesker lager seg forskjellige skjemaer som passer til forskjellige temaer. Etter hvert som det skjer læring utvider disse skjemaene seg. Det er når disse skjemaene er mangelfulle det kan oppstå misoppfatninger.

3. Metode

I denne bacheloroppgaven ser jeg på hvilke misoppfatninger rundt brøkbegrepet og regning med brøk som finnes i en tilfeldig valt gruppe elever på 7. trinn. Denne studien er utført som en casus-studie, da fokuset ligger på en spesiell enhet (Jacobsen, 2015). Dette betyr at de eventuelle misoppfatningene som blir avslørt i oppgaven er ikke derfor ikke generaliserbare, fordi det kun gjelder for den valgte gruppen.

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

Det er to hovedtyper innenfor metode, kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode. I denne bacheloroppgaven har jeg valgt å bruke en kvalitativ tilnærming. Noe av det karakteristiske ved kvalitativ forskningsmetode er måten dataene blir samlet inn på. Dataene, også kalt mykdata, er ikke målbare data, og blir ofte hentet inn gjennom intervjuer. Kvalitative undersøkelser har gjerne en løsere problemstilling enn kvantitative undersøkelser. Dette forekommer ettersom kvalitative undersøkelser går ut på å forstå et fenomen, mens kvantitative undersøkelser går ut på å forklare et fenomen. I en kvalitativ undersøkelse møter forskeren vanligvis informantene ansikt til ansikt. Dette gir muligheten til å gå i dybden på besvarelsene til informantene gjennom oppfølgingsspørsmål dersom dette er nødvendig. Ettersom forskeren får en bedre forståelse av fenomenet som studeres vil det bli lettere å forklare funnene (Larsen, 2014).

3.2 Hermeneutikken

Befring (2015) beskriver hermenautikken som metode som en subjektiv fortolkende prosess. Denne fortolkende prosessen skal føre til en økt helhetlig forståelse av data. Hans-Geord Gadamer, som regnes som grunnlegeren av den filosofiske hermenautikken, mente dokumentanalyse var en sirkulær prosess. Denne prosessen starter med en forutforståelse som kan inneholde både forskerens fordommer og faglige innsikt. Denne forståelse vil påvirke tolkningsprosessen av dataene. Videre skriver Befring at hermenautisk metode er sentral i utdanningsvitenskapen da kvalitativ forskning ofte omhandler meninger formidlet muntlig gjennom intervjuer.

3.3 Intervju som datametode

Intervju som metode for insamling av data gjør at informantene gir muntlig uttrykk for sine tanker, ideer og oppfatninger (Befring, 2015). Et intervju er som regel utformet slik at det er en forsker som spør og en eller flere intervjuobjekter som svarer. Dette intervjuet blir ofte enten tatt opp med diktafon eller filmet for deretter å bli transkribert.

Befring (2015) skriver videre at intervju der informantene kommer til institusjonen eller forskerens arbeidsplass kalles et klinisk intervju. Intervjuer der forskeren reiser til informantene, for eksempel til skolen for å intervjue elever og lærere kalles feltintervju. I min studie gjorde jeg et feltintervju da jeg oppsøkte en skole og gjennomførte intervjuene av informantene der.

Intervju som metode kan deles inn i tre typer intervjuer. Et intervju der man snakker vidt rundt et tema, eller stiller åpne spørsmål er definert som et ustrukturert intervju. Denne frie samtalen blir ofte tatt opp med diktafon for deretter å bli transkribert. Denne typen intervju er typisk for kvalitative studier. Den andre typen intervju er intervjuer som er basert på en detaljert intervjuguide. Her stiller forskeren akkurat de spørsmålene som er planlagt, eller leverer ut spørsmålene skriftlig til informanten. Denne typen intervju er beskrevet som et strukturert intervju. Den siste typen intervju er det semistrukturerte intervjuet. Dette er en gyllen balansegang mellom det strukturerte og det ustrukturerte intervjuet. Her er det ofte en intervjuguide der spørsmål og føringer for intervjuet står, men informantene har ingen svaralternativer og gir derfor svar kun basert på egne tanker. I et semistrukturert intervju kan også forskeren stille oppfølgingsspørsmål for å bedre forstå tankegangen til informantene.

Jeg valgte å bruke et semistrukturert intervju i min studie. Informantene det samme settet med diagnostiske oppgaver som de fikk da jeg valgte ut informanter. De hadde muligheten til å kladde undervegs dersom de hadde behov for det. I tillegg stilte jeg oppfølgingsspørsmål der jeg følte dette var nødvendig. Oppfølgingsspørsmålene gikk i all hovedsak ut på at informantene skulle utdype deres fremgangsmåter og strategier.

3.4 Validitet og reliabilitet

Validiteten til en studie omhandler dataenes relevans eller gyldighet i forhold til problemstillingen. Når man bruker intervju som datametode er det enklere å sikre en høy validitet. Under et intervju kan man stille spørsmål som leder intervjuet i riktig retning dersom svarene går bort fra problemstillingen, altså at svarene eller de stilte spørsmålene er urelevante for problemstillingen (Larsen, 2014). Validiteten kan i en kvalitativ studie kan derimot svekkes da forskeren ofte sitter med, som nevnt tidligere, en forutforståelse som kan påvirke innsamlingen og analysen av datamaterialet (Befring, 2015).

Larsen (2014) skriver videre at reliabilitet handler om nøyaktigheten eller påliteligheten til en studie. For å sikre høy reliabilitet i kvalitative studier kan flere forskere gjøre den samme undersøkelsen, eller at det er flere til stede under intervjuene. Grunnen til dette er at i en kvalitativ studie tolkes det en hel del, og tolkninger er subjektive. Under intervjuer er det også mulighet for at informanten påvirkes av situasjonen. Det er ikke sikkert at en annen forsker ville fått samme svar av den samme informanten.

I min studie har jeg gjennomført intervjuene alene, og det er heller ingen andre som har gjennomført en lik undersøkelse samtidig som meg. For å sikre høyest mulig reliabilitet i min studie har jeg derfor behandlet dataene mine svært nøyaktig. Jeg har transkribert de tre gjennomførte intervjuene og sett på disse sammen med de gjennomførte prøvene for å forstå elevenes fremgangsmåter så godt som mulig.

3.5 Innsamling av data

For å finne frem til mine informanter brukte jeg en kartleggingsprøve med diagnostiske oppgaver (vedlegg 1) på en tilfeldig valgt gruppe på 7. trinn. Gruppen besto av 14 gutter og 12 jenter, som utgjør en total på 26 elever. Etter å ha sett på elevenes besvarelser valgte jeg ut de besvarelsene som var mest interessante for min studie. Elevene som ga disse besvarelsene ble deretter spurt om de kunne tenke seg å delta i studien. Fem av de seks spurte elevene kunne tenke seg dette, og fikk derfor med seg et samtykkeskjema hjem til sine foresatte. Av de fem elevene var det tre som fikk godkjennelse av sine foresatte til å delta i studien. Disse tre elevene ble mine informanter; det er disse jeg har basert min studie på.

Intervjuene ble gjennomført to uker etter kartleggingsprøven grunnet tiden det tok å få godkjennelse fra de foresatte og andre praktiske årsaker. Intervjuguiden til intervjuene er den samme kartleggingsprøven som elevene tok i starten av studien. De semistrukturerte intervjuene varte ca 15 minutter og ble tatt opp med diktafon. Det var kun informanten og intervjuer til stede under intervjuet. Informantene tok den samme kartleggingsprøven på nytt og kommenterte sine svar undervegs. Hvis det var nødvendig ble det stilt spørsmål rundt tankegangen og svarene til informanten av intervjuer. Etter intervjuene var utført ble disse transkribert. De transkriberte intervjuene ble så analysert sammen med elevenes besvarelser. Dette gjorde at jeg fikk dypere innsikt i elevenes fremgangsmåter enn jeg ville fått dersom jeg kun leverte ut en prøve og analyserte denne.

4. Presentasjon av data

I dette kapittelet skal jeg først presentere og begrunne valget av oppgaver i undersøkelsen. Deretter legger jeg fram elevenes besvarelser og drøfter disse.

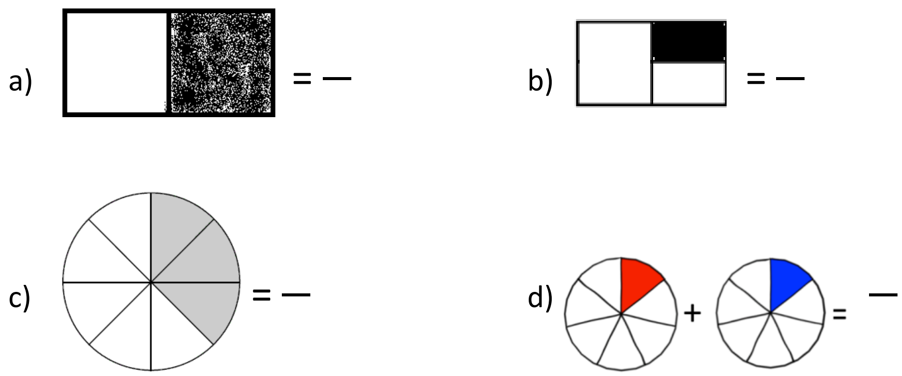
4.1 Presentasjon av oppgavene

Jeg har brukt to av Brekkes (1995) punkter som beskriver målet for diagnostiske oppgaver som utgangspunkt for min diagnostiske prøve.

- Å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også uten at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke
- A gi læreren (forskeren) informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver

4.1.1 Oppgave 1

Hvor stor del av figuren er skravert?



I disse oppgavene ser jeg på elevenes forståelse av brøk som del av en helhet. Her skiller oppgave b seg fra de tre andre oppgavene ved at rektangelet er delt opp i tre deler der to av delene er like store og den tredje er like stor som de to delene til sammen. Denne oppgaven er bevisst lagt ved for å se om elevene har oppfattet at delene må være delt opp i like store deler. McIntosh (2007) skriver at det er en vanlig misoppfatning hos elever at de ikke forstår at delene må være like store. Denne misoppfatningen kommer av at det norske språket ikke er presist når man snakker om å dele ting i halvdeler, firedeler osv. Oppgaven avdekker også om elevene tenker at å dele et ark i to like store deler, for så å dele den ene halvdelen igjen blir $\frac{1}{3}$.

4.1.2 Oppgave 2

Regn ut

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{}{}$ b) $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{}{}$

c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{}{}$ d) $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{}{}$

e) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{}{}$ f) $\frac{4}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{}{}$

Oppgave 2 a og b er addisjonsoppgaver som allerede har felles nevner. Disse to oppgavene har som hensikt å avdekke om elevene har forståelse for at det er teller som skal legges sammen med teller og fellesnevneren forblir den samme dersom det er en addisjonsoppgave. Oppgave 2 c og d er addisjonsoppgaver uten fellesnevner. Denne typen oppgaver er tatt med da det ofte foreligger noen misoppfatninger rundt fellesnevner og hvordan man finner denne. Dette er også en videreføring av det Solem, Alseth og Nordberg (2010) skriver om at likeverdige brøker legger grunnlaget for regning med brøk. Det er også spennende å se om elevene velger å løse oppgavene ved å addere teller med teller og nevner med nevner. Velger de denne måten kan det se ut som de velger å se på stykket som to forskjellige regnestykker, et eget over og et eget under brøkstreken. McIntosh (2007) skriver om nødvendigheten av å forstå hvorfor man gjør brøker likeverdige når man adderer brøker. I oppgave 2 d er det også interessant å se hvordan elevene løser uekte brøk. Oppgave 2 e og f er multiplikasjonsoppgaver. I multiplikasjonsoppgaver i brøk trengs det ikke å finne en fellesnevner før man regner ut oppgaven. At man ikke skal finne en fellesnevner kan det for noen være vanskelig å forstå, og velger diverse løsninger for å finne en fellesnevner.

4.1.3 Oppgave 3

Forkort brøken

a) $\frac{5}{10} = \frac{}{}$

b) $\frac{3}{9} = \frac{}{}$

c) $\frac{10}{15} = \frac{}{}$

d) $\frac{7}{28} = \frac{}{}$

Jeg har valgt å ta med forkortingsoppgaver i undersøkelsen da dette går på å se at forskjellige brøker kan ha lik verdi. Oppgavene elevene fikk er relativt små tall som er fine og jobbe med. Grunnen til dette er at jeg ville se fremgangsmåten til elevene, og ikke hvor dyktige de var til å forkorte brøker med mange sifre. Solem, Alseth og Nordberg (2010) skriver om at elevene kan se på forskjellige brøker ved å plassere dem opp mot hverandre ved hjelp av en tallinje. Her skal elevene se på dette ved å forkorte brøkene, og ikke ved å bruke tallinje.

4.1.4 Oppgave 4

Ola får et lodd i gave av farmor og farfar. Han vinner 100 kr. Ola bestemmer seg for å dele gevinsten med farmor og farfar. Han vil gi $\frac{1}{4}$ av pengene til farmor og farfar, og beholde $\frac{3}{4}$ selv.

a) Hvor mange kroner får farmor og farfar?
b) Hvor mange kroner beholder Ola selv?

Jeg har valgt å ta med en tekstoppgave for å se på elevenes forståelse av brøk som relativ størrelse (Solem, Alseth & Nordberg, 2010). Her skal elevene prøve å se sammenhengen mellom brøk og mengde. Elevene må se hvor mye $\frac{1}{4}$ er av 100 kroner, og $\frac{3}{4}$ er av 100 kroner.

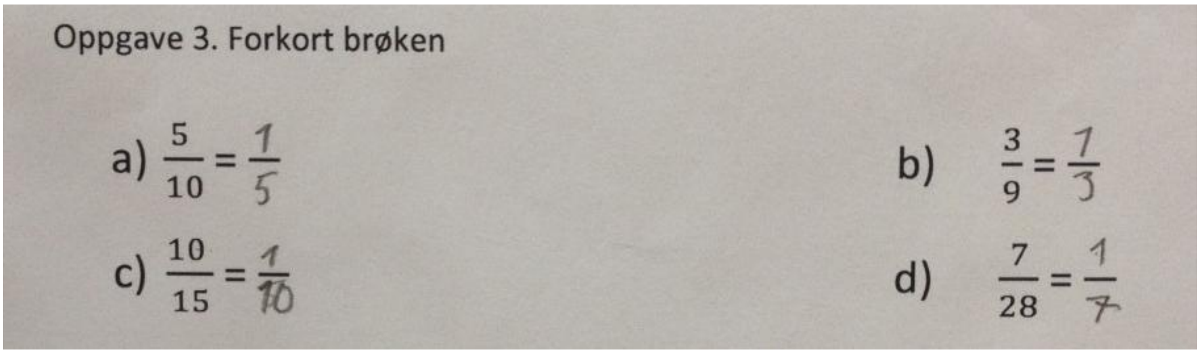
4.2 Presentasjon og drøfting av elevbesvarelser

Jeg velger kun å presentere data som er relevant for problemstillingen. Derfor vil alle riktige svar bli luket bort, og alle tendenser til misoppfatninger vil bli trukket fram. Informantene blir heretter referert til som elev 1, elev 2 og elev 3. De tre valgte elevene ble intervjuet underveis i prøvene.

4.2.1 Elev 1

Elev 1 gir interessante besvarelser på oppgave 2. Han velger å legge sammen teller med teller og nevner med nevner konsekvent i addisjonsoppgavene, altså oppgave 2 a, b, c og d. Dette gjør at han ender opp med svarene $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{7}$ og $\frac{5}{8}$. Elev 1 velger konsekvent å benytte seg av denne strategien for å komme frem til svaret. Ettersom eleven alltid bruker samme fremgangsmåten på alle fire addisjonsstykkene utelukker jeg at dette er en tilfeldig feil. Det kan se ut som at eleven velger å dele opp brøkene til et eget stykke der han legger sammen teller med teller, og et eget der han legger sammen nevner med nevner. Med dette bruker eleven samme tankegang som man ville gjort dersom dette var to addisjonsstykker med naturlige tall. Dette tyder på at eleven ikke har akkomodert sine tidligere skjemaer, og ender derfor opp med å assimilere addisjon av brøk i skjemaet for addisjon av naturlige tall (Imsen, 1998). Eleven har ikke forstått viktigheten av å gjøre brøker likeverdige, og ender derfor opp med å unnlate og gjøre dette i sine utregninger (McIntosh, 2007). Ut fra dette velger jeg å kategorisere dette som en misoppfatning hos eleven.

I oppgave 3 skal eleven forkorte brøkene og gir besvarelsene $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{7}$ (se Figur 1). Her velger eleven en fremgangsmåte som det viser seg at kan fungere ved helt spesielle anledninger. Fremgangsmåten eleven velger å bruke her er å sette telleren i den brøken som skal forkortes til nevner i den nye brøken. Deretter velger eleven å sette telleren til 1 i den nye brøken. Dette gjør at eleven svarer $\frac{5}{10} = \frac{1}{5}$. I dette tilfellet er ikke det riktig, men i oppgave 3 b blir svaret korrekt ved denne fremgangsmåten. På oppgave 3 b gir eleven det korrekte svaret $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Her gjør fortsatt eleven det samme, og på grunn av sifrene i den brøken han skal fortkorte blir det rett. Dette forekommer også dersom brøken som skal forkortes er for eksempel $\frac{2}{4}$ eller $\frac{10}{100}$. Dette kategoriserer jeg som en misoppfatning selv om eleven gjør ene oppgaven riktig. Det er fremgangsmåten eleven velger å bruke som er det som er interessant og ikke om svarene er rett eller ei.

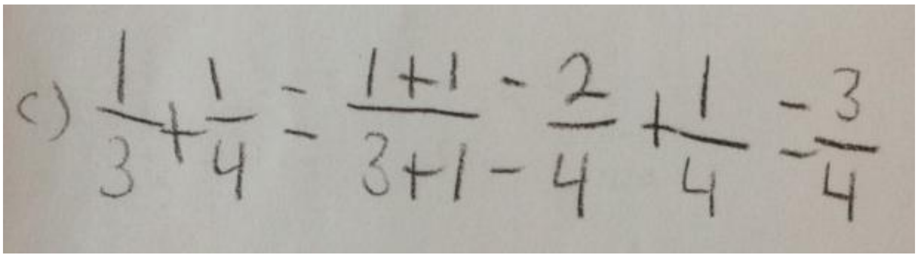


Figur 1: Elev 1 sin besvarelse av oppgave 3.

4.2.2 Elev 2

Elev 2 besvarer oppgave 1 a, c og d riktig. Likheten mellom disse oppgavene er at delene som figurene er delt inn i er av lik størrelse. På oppgave 1 b svarer eleven $\frac{1}{3}$. Han teller her, som i de andre oppgavene, antall deler figuren er delt opp i og setter dette som nevner og antall skraverte deler og setter dette som teller. Han stiller ikke spørsmål ved at den ene delen er dobbelt så stor som de to andre og svarer derfor feil. McIntosh (2007) nevner akkurat denne misoppfatningen i boken *Alle Teller!*. Han skriver det er en vanlig misoppfatning når man skal dele et rektangel i tre like deler, deler man først rektangelet i to like deler. Deretter deler man den ene halvdelen i to igjen. Dette fører til at man ender opp med en halv, en kvart og en kvart. Jeg kan ikke kategorisere dette som en misoppfatning da jeg kun har en oppgave å gå ut ifra og har derfor ikke muligheten til å se et mønster i løsningen av denne typen oppgaver.

I oppgave 2 c forklarer eleven at her må han finne fellesnevner. Dette velger eleven å gjøre ved å legge til 1 til teller og 1 til nevner. Han får da regnestykker $\frac{1+1}{3+1} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$. Herifra regner eleven rett og gir besvarelsen $\frac{3}{4}$ (se Figur 2). Feilen her ligger måten eleven finner fellesnevner. I stedet for å finne minste felles multiplum kan det se ut som eleven tar utgangspunkt i nevneren med størst siffer og bruker denne som fellesnevner. Selv om eleven her finner en lik nevner til begge brøkene blir dette feil da brøkene ikke har lik verdi som de tidligere hadde. Brøkene er derfor ikke likeverdige (McIntosh, 2007).



Figur 2: Elev 2 sin besvarelse av oppgave 2 c.

Oppgave 2 d skal løses på samme måte som oppgave 2 c. Eleven forstår fort at her skal han også finne fellesnevner. Fremgangsmåten her er ved første øyekast litt annerledes enn i den forrige oppgaven da eleven her ender opp med $\frac{4+2}{5+2} + \frac{1+4}{3+4} = \frac{6}{7} + \frac{5}{7}$. Her legger han til 2 til både telleren og nevneren på den første brøken. Deretter legger eleven til 4 til både teller og nevner på den andre brøken. En grundigere analyse viste etter hvert grunnen til at eleven her ender opp med 7 som fellesnevner. Han velger å legge sammen telleren i den første brøken, 4, med nevneren i den andre brøken, 3, og ender opp med fellesnevneren 7. Dette setter oppgave 2 c i et nytt lys. Dersom eleven bruker lik fremgangsmåte velger han her å bruke nevneren i den første brøken, 3, og legger til telleren i den andre brøken, 1, for så å få 4 som fellesnevner. Dette gjør at han ikke trenger å gjøre noen moderasjoner på den andre brøken som allerede har 4 som nevner. Videre ser eleven at telleren blir et høyere tall enn nevneren.

Elev: ”Det går ikke, det blir over”.

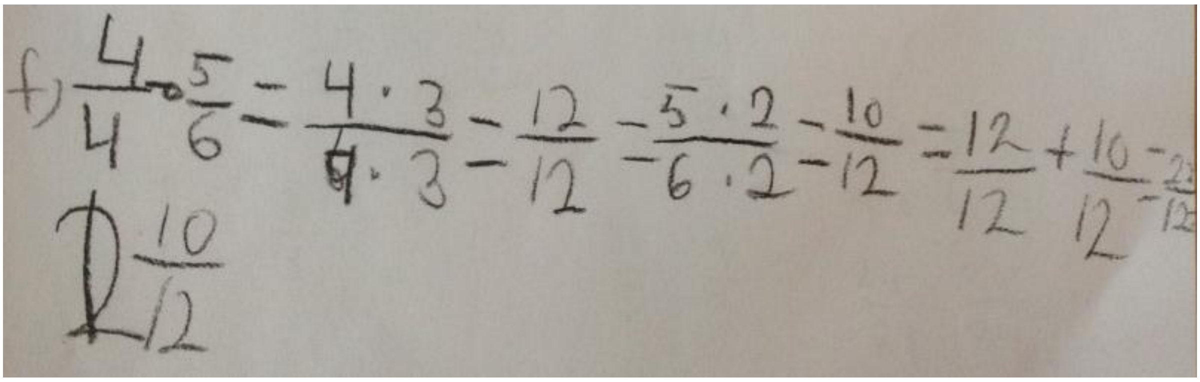
Intervjuer: ”Går det ikke an at telleren er et høyere tall enn nevneren?”

Elev: ”Jo, det gjør det”.

Denne korte dialogen viser at eleven har kjennskap til begrepet brudden brøk. Eleven fortsetter og legger sammen $\frac{6}{7}$ og $\frac{5}{7}$, og får svaret 1 $\frac{4}{7}$. Dette svaret er riktig ut fra de to brøkene eleven hadde å jobbe med. Eleven gjør samme feil som i oppgaven 2c som går på likeverdige brøker (MvIntosh, 2007). Brekke (1995) skriver om ferdigheter innenfor matematikk. Her ser det ut som ferdigheten som kreves for å finne fellesnevner ikke er på plass.

Oppgave 2 e er den første multiplikasjonsoppgaven elevene kommer til. Her velger eleven igjen å finne fellesnevner. Denne gangen bruker han en annen fremgangsmåte enn tidligere. Han setter opp regnestykket $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$. Deretter setter han opp regnestykker $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{4}{20}$. Han velger å ta utgangspunkt i de to nevnerne for å finne et multiplum av de to tallene. Dette gjør eleven ved å multiplisere de sammen. Grunnen til at han her velger multiplikasjon kan være at det er en multiplikasjonsoppgave han arbeider med i utgangspunktet. Videre fortsetter eleven og skriver $\frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$. Han velger altså å addere de to brøkene som han har funnet en fellesnevner til.

Eleven starter oppgave 2 f med å finne fellesnevner. Denne gangen velger han ikke å multiplisere de to nevnerne sammen, men finner at både 4 og 6 går opp i 12. Han fortsetter med å skrive $\frac{4}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{12}{12}$. Eleven regner videre og skriver $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$. Nå foretar han seg det samme som i forrige oppgave. Han velger å legge sammen $\frac{12}{12}$ og $\frac{10}{12}$, og ender opp med svaret $\frac{22}{12} = 1\,\frac{10}{12}$ (Se Figur 3).



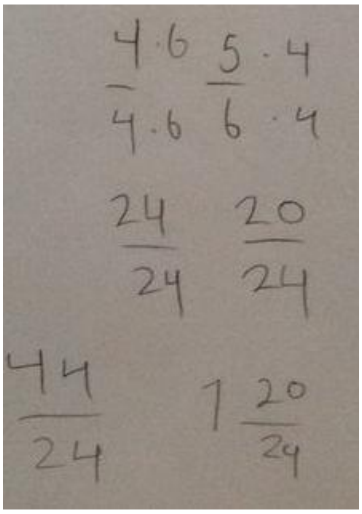
Figur 3: Elev 2 sin besvarelse av oppgave 2 f.

Denne eleven har forstått at fellesnevner er et begrep som er viktig når det gjelder brøkregning. Videre ser jeg at forståelsen for uekte brøk er på plass. Dette viser eleven gjennom oppgavene som gir et svar der teller er et høyere tall enn nevner. I oppgave 2 c og d velger eleven en noe spesiell fremgangsmåte for å finne fellesnevner. I oppgave 2 e og f velger eleven den fremgangsmåten som han burde brukt i oppgave 2 c og d. Dette kan tyde på at eleven sliter med når han skal bruke ulike tillærte strategier, og har muligens ikke alle ferdigheter på plass (Brekke, 1995). For å si med sikkerhet om denne eleven har noen misoppfatninger hadde flere like oppgaver vært nødvendig. Ettersom det kun er to og to like oppgaver velger jeg å se på dette som feil og misforståelser. Det er altså ikke tilstrekkelig med informasjon å hente for å kunne konstatere at dette er misoppfatninger.

4.2.3 Elev 3

Elev 3 løser oppgave 2 a, b, c og d på samme måte som elev 1. Hun velger konsekvent å legge sammen teller med teller og nevner med nevner. Hun velger ikke å finne noen fellesnevner før hun legger sammen brøkene på oppgave c og d der dette trengs. Jeg kan derfor anta at elev 3, som elev 1, ser på addisjonsoppgaver med brøk som to separate oppgaver, der den ene oppgaven er å legge sammen det som er over brøkstreken med hverandre, og det som er under brøkstreken med hverandre. Dette gjør at eleven gir svaret $\frac{2}{6}$ på oppgaven $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Det er derfor grunn til å tro at denne eleven har assimilert addisjonsstykker med brøk inn i skjemaet for addisjon med naturlige tall (Imsen, 1998). De ferdighetene som kreves for at eleven skal løse denne typen oppgaver er heller ikke på plass (Brekke, 1995). Dette velger jeg å kalle en misoppfatning hos eleven da hun gjør den samme operasjonen konsekvent på denne typen oppgaver.

Oppgave 2 e løser eleven korrekt ved å gange teller med teller og nevner med nevner, og får svaret $\frac{3}{20}$. Oppgave 2 f velger derimot eleven å løse på en annen måte. Hun bruker samme fremgangsmåte som Elev 2. Elev 3 velger å multiplisere telleren og nevneren i den første brøken med nevneren i den andre brøken, 6. Hun får regnestykket $\frac{4\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{24}{24}$. Den andre brøken gjør hun akkurat det samme. Hun multipliserer telleren og nevneren i den andre brøken med nevneren i den første brøken, 4. Hun får regnestykker $\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$. Hun legger deretter sammen de to nye brøkene og får $\frac{24}{24}+\frac{20}{24}=\frac{44}{24}=1\,\frac{20}{24}$ (se Figur 4). Jeg vil ikke kategorisere dette som en misoppfatning hos eleven fordi hun løser oppgave 2 e og f på forskjellige måter. Det kan se ut som eleven har noen ferdigheter på plass, men sliter med når hun skal bruke den enkelte. Dette tyder på at eleven ikke har generelle strategier på plass (Brekke, 1995). For å komme til bunns i en om dette er en misoppfatning eller ikke må man gå mer i dybden på elevens tankegang. Dette kan gjøres ved at elevens får løse flere like oppgaver og se om det er et mønster med like fremgangsmåter, om eleven har laget seg en strategi som den bruker konsekvent.



Figur 4: Elev 3 sin besvarelse av oppgave 2 f.

5. Konklusjon

I denne studien skulle jeg avdekke hvilke misoppfatninger rundt brøkbegrepet og regning med brøk finnes i en 7. klasse? Ved bruk av Brekkes definisjon på misoppfatninger har jeg gjort noen svært interessante funn i denne casus-studien. Elev 1 har etter mine analyser en misoppfatning når det kommer til addisjonsoppgaver med brøk. Han velger konsekvent å legge sammen teller med teller og nevner med nevner. Dette kan tyde på at eleven ikke har akkomodert skjemaene sine. Elev 1 har også noe som jeg velger å kategorisere som en misoppfatning innenfor forkorting av brøk. Han velger å forkorte en brøk ved å bruke telleren i brøken han skal forkorte som nevneren i den forkortede brøken. Han setter deretter telleren til 1. Elev 2 gir interessante besvarelser på oppgavene. Jeg velger ikke å kategorisere noen av forståelsene til eleven som misforståelser. Grunnen til dette er at prøven inneholder for få oppgaver av hvert slag til å kunne si om dette er en bestemt fremgangsmåte eleven bruker eller om det er tilfeldig valgte strategier. Elev 3 har samme misoppfatning som Elev 1 innenfor addisjon med brøk. Videre velger denne eleven litt forskjellige fremgangsmåter på samme typen oppgaver. Dette gjør at jeg ikke kan dra noen slutning om det foreligger noen andre misoppfatninger flere misoppfatninger hos denne eleven.

I ettertid ser jeg at det hadde vært svært gunstig for studien dersom jeg hadde tatt med flere oppgaver innenfor multiplikasjon med brøk, oppgaver hvor man må finne fellesnevner, og flere oppgaver som omhandlet brøk som del av en helhet. Grunnen til dette er at jeg ikke har kunnet kategorisere oppfatninger som misoppfatninger eller ikke, da det ikke lar seg gjøre å se en helt klar sammenheng mellom fremgangsmåter på kun to oppgaver.

Jeg mener det er en viss overføringsverdi i studien da misoppfatninger innenfor brøk er et svært vanlig fenomen. Noen av funnene jeg har gjort i min studie vil mest sannsynlig finnes andre steder over det ganske land. Videre forskning kan vise hvordan man kan få bukt med disse misoppfatningene. Det er også stor mulighet til å kartlegge om det jeg har valgt å se på som feil, på grunn av manglende data, er misoppfatninger.

6. Litteraturliste

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2012). *QED 1-7 Matematikk for grunnskolelærerutdanningen – bind 1*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Imsen, G. (1998). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Tano Aschehoug

Jacobsen, D. I. (2015). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (3. utg.). Oslo: Cappelen Damm AS.

Larsen, A. K. (2007). *En enklere metode – Veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode*. Bergen: Fagbokforlaget.

McIntosh, A. (2007). *Alle teller!: håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen: kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området: tall og tallforståelse*. Trondheim: Matematikksenteret.

Solem, I. H., Alseth B. & Nordberg G. (2010). *Tall og tanke – matematikkundervisning på 1.til 4. trinn*. Oslo: Gyldendal

Utdannningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål*. Lokalisert på:
http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal?arst=372029323&kmsn=-632498266

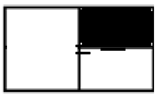
7. Vedlegg

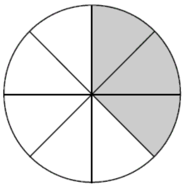
7.1 Vedlegg 1

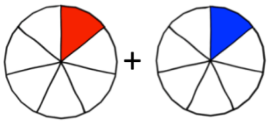
Navn:

Oppgave 1. Hvor stor del av figuren er skravert?

b)  $= \frac{\ }{\ }$

b)  $= \frac{\ }{\ }$

d)  $= \frac{\ }{\ }$

d)  $= \frac{\ }{\ }$

Oppgave 2. Regn ut

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\ }{\ }$

b) $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{\ }{\ }$

f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\ }{\ }$

f) $\frac{4}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\ }{\ }$

Oppgave 3. Forkort brøken

b) $\frac{5}{10} = \frac{\ }{\ }$

b) $\frac{3}{9} = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{10}{15} = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{7}{28} = \frac{\ }{\ }$

Oppgave 4

Ola får et lodd i gave av farmor og farfar. Han vinner 100 kr. Ola bestemmer seg for å dele gevinsten med farmor og farfar. Han vil gi $\frac{1}{4}$ av pengene til farmor og farfar, og beholde $\frac{3}{4}$ selv.

c) Hvor mange kroner får farmor og farfar?

d) Hvor mange kroner beholder Ola selv?