HØGSKOLEN
i INNLANDET

LUNA

Anette Tveterhagen Løkken

Bacheloroppgave

Brøkforståelse på 6.trinn

- En undersøkelse av hvilke misoppfatninger vi kan finne om brøk på 6. trinn

A study of misconceptions in 6th grade

3 GLUS 1-7

Våren 2018

Samtykker til tilgjengeliggjøringni digitalt arkiv Brage JA ☒ NEI ☐

Norsk sammendrag

Tittel: Brøkforståelse på 6. trinn: en undersøkelse av hvilke misoppfatninger om brøk vi kan finne på 6. trinn.	
Forfatter: Anette Tveterhagen Løkken	
År: 2018	**Sider:** 46
Emneord: Misoppfatninger, brøk, diagnostiske oppgaver, begrepsforståelse	

Sammendrag:

Brøk regnes for å være et av barneskolens vanskeligste temaer innenfor matematikk, og denne oppgaven omhandler hvilke misoppfatninger i brøk vi kan finne på 6.trinn. For å hjelpe elevene på rett vei er det viktig at lærere kan avdekke misoppfatninger hos elevene så tidlig som mulig, slik at disse kan korrigeres. Ved kvalitativ metode har jeg intervjuet seks elever for å belyse problemstillingen. Intervjuguiden bestod av diagnostiske oppgaver, som har til hensikt å avsløre eventuelle misoppfatninger.

Undersøkelsen viser at vi kan finne de fleste vanlige misoppfatningene innenfor temaet brøk, på 6.trinn. Det ble avdekket at flere elever mangler grunnleggende brøkforståelse knyttet til brøkens verdi, og brøk som en helhet. Manglende brøkforståelse kan være et resultat av at elevene har pugget regler, uten å ha forstått *hvorfor* vi regner slik, og dette kan føre til misoppfatninger. Arbeid med grunnleggende begrepsforståelse vil være avgjørende for å gradvis utvide elevenes kunnskaper i brøk.

Engelsk sammendrag (abstract)

Title: A study of misconceptions in 6th grade.	
Author: Anette Tveterhagen Løkken	
Year: 2018	**Pages:** 46
Keyword: Misconceptions, fraction, diagnostics tasks, conceptual understanding	

Summary:

Fractions is considered one of the most challenging themes within mathematics during primary school. The topic of this paper deals with the misconceptions about fractions that exist in 6th grade. It is important that teachers are capable of identifying their pupils' misconceptions at an early stage, so they can be corrected. I have used a qualitative method by interviewing six pupils in 6th grade, to answer the thesis question. The interview guide consists of several diagnostic tasks, designed to identify the pupils' misconceptions.

The study reveals that the most common misconceptions about fractions exist among the pupils. The study indicates that the pupils lack a basic understanding when it comes to the size of the fractions, and to see the fractions as a whole unit. The lack of understanding could be a result of the pupils studying and learning the rules without knowing *why*, and that can lead to misconceptions. A greater focus on fundamental conceptual understanding is essential to gradually expand the pupils' knowledge about fractions.

Forord

Denne bacheloroppgaven er skrevet i forbindelse med mitt tredje studieår på grunnskolelærerutdanningen 1-7 ved Høyskolen i Innlandet, avdeling Hamar. Helt siden jeg satt mine bein på høyskolen har jeg ønsket å fordype meg i temaet brøk. Brøk er noe jeg alltid har syntes vært gøy og interessant, men jeg har også forstått at veldig mange oppfatter brøk som vanskelig. Ettersom jeg har valgt å fordype meg i matematikk med 60 studiepoeng dette året, var det naturlig å skrive bachelor innenfor dette faget. Personlig har jeg et ønske om å bli en god matematikklærer, og for å kunne forklare og hjelpe elevene tilstrekkelig trenger jeg kunnskap om hvilke utfordringer de kan møte.

Arbeidet med oppgaven har vært meget interessant og lærerikt, og jeg har fått mye nyttig kunnskap som jeg vil ta med meg videre inn i lærerrollen. Samtidig håper jeg at oppgaven kan være med på å belyse hva som gjør brøk til et vanskelig tema, og hva lærere bør være oppmerksomme på. Mitt ønske er at jeg nå har bedret mine forutsetninger for at mine fremtidige elever skal få et positivt møte med brøkemnet.

Jeg vil takke mine informanter som var så snille og delte sine erfaringer og kunnskaper med meg, og til kontaktlæreren som hjalp til med utvelgelsen. Jeg vil også takke mine nærmeste venner og familie som har støttet meg i oppgaveskrivingen, og en ekstra takk til min tante for å ha hjulpet meg med småpirk her og der.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til min veileder Nils Fjeldsø for raske og gode tilbakemeldinger gjennom hele dette semesteret.

Anette Tveterhagen Løkken

Fjerdingby, 26. Mai 2018

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) er en internasjonal studie som måler ferdigheter i matematikk og naturfag for grunnskolen. Et av de viktigste formålene til TIMSS er å kunne presentere data av høy kvalitet om elevers prestasjoner, og designet gjør det mulig å vise utvikling av prestasjoner over tid (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 11). I alle TIMSS-studier hvor Norge har deltatt i perioden 1995-2011, har norske elever skåret i underkant av gjennomsnittet i matematikk (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 17), noe som har resultert i flere omfattende realfagssatsninger fra Kunnskapsdepartementet.

Hovedfunnene fra TIMSS 2015 viser derimot at norske elever på 5. trinn presterer svært bra i matematikk. De skårer signifikant høyere enn jevnaldrende elever i de andre nordiske landene, og plasserer seg blant de beste i Europa (Bergem, 2015, s. 22). Dersom vi går dypere inn i resultatene, ser vi at det er svakere prestasjoner i emneområdet Tall enn det er i Statistikk og Geometri (Bergem, 2015, s. 35). Selv om norske elever presterer godt sammenliknet med elever fra andre nordiske land, har vi fortsatt et forbedringspotensial innenfor dette temaet. Emneområdet Tall inneholder oppgaver knyttet til de fire regneartene, samt regning med brøk og desimaltall.

På bakgrunn av at TIMSS-studier fortsatt viser at vi har et forbedringspotensial innenfor brøk, har jeg valgt å skrive min bacheloroppgave innenfor dette temaet. Personlige erfaringer fra både praksis og jobb i barneskole, har gitt meg inntrykk av at mange elever synes brøk er vanskelig. I tillegg har flere lærere fortalt meg at de ikke liker å undervise i brøk, på grunn av manglende kunnskap om emnet. Dette får meg til å sette spørsmålstegn ved hva som gjør brøk så utfordrende, og hvilke vansker som kan oppstå.

I følge læreplanen skal elevene allerede etter 4. trinn kunne bruke enkle brøker i praktiske sammenhenger og uttrykke tallstørrelser på varierte måter (Utdanningsdirektoratet, 2013). Samtidig skal de legget et grunnlag for regning med brøk på høyere klassetrinn, noe som tilsier at lærere må tilrettelegge undervisningen slik at elevene får god brøkforståelse. Det er velkjent at det er en kritisk fase i læringen av matematikk når tallområdet blir utvidet fra hele tall til å omfatte brøk (Brekke, 2002, s. 10). Hvordan kan lærere tilrettelegge undervisningen slik at brøkinnlæringen blir enklere for elevene?

1.2 Problemstilling

Mitt mål med denne oppgaven er å sette søkelys på hvorfor brøk oppleves som et vanskelig tema innenfor matematikk. På bakgrunn av dette har jeg valgt å undersøke hvilke misoppfatninger som kan oppstå hos elever. Ved å avdekke misoppfatninger i en tidlig fase av læringen, kan man forhåpentligvis hindre at disse blir værende hos elevene. Som matematikklærer er det derfor viktig å ha kunnskap om hvordan misoppfatninger oppstår, og hvordan disse kan oppdages, slik at man kan hjelpe elevene på rett vei.

Mitt ønske med denne oppgaven er at jeg skal få større innsikt i hvilke problemer som kan oppstå, slik at jeg, i min senere profesjonsutøvelse, i større grad blir i stand til å tilpasse og tilrettelegge undervisningen slik at misoppfatninger kan unngås. På bakgrunn av dette har jeg valgt følgende problemstilling:

Hvilke misoppfatninger i brøk kan vi finne på 6. trinn?

For å kartlegge dette, har jeg valgt å gjennomføre en diagnostisk undersøkelse på elever fra 6. trinn. Ved å intervjue elevene om hvordan de tenker mens de løser diagnostiske oppgaver, har jeg fått god innsikt i deres tankeprosesser. Min begrunnelse for trinnvalg er at elevene bør gå ut av barneskolen med en god forståelse av brøk, og dersom det eksisterer mange misoppfatninger siste semester av sjetteklasse, er det fortsatt tid til å rette opp disse i løpet av det syvende året.

1.3 Disposisjon/Oppbygning av oppgaven

Første kapittel innledes med begrunnelse for valg av tema, og presentasjon av problemstilling. Videre i andre kapittel beskrives relevant teori og forskning. I tredje kapittel blir oppgavens metode presentert og begrunnet, i tillegg til en utdypning om prosjektets gjennomføring. Det blir også gjort rede for oppgavens reliabilitet og validitet. Kapittel fire omhandler presentasjon og analyse av resultatene, og i kapittel fem knytter jeg disse resultatene opp mot utvalgt teori. Oppgaven avsluttes med konklusjon og refleksjoner rundt problemstillingens relevans, og den eventuelle veien videre.

2. Teori

I dette kapittelet presenterer jeg relevant teori tilknyttet problemstillingen. Jeg vil først gjøre rede for hva misoppfatninger er, og deretter hvordan disse kan oppdages og korrigeres ved hjelp av diagnostisk undervisningspraksis. Videre følger en beskrivelse av brøkbegrepet, og kapittelet avsluttes med en presentasjon av de vanligste misoppfatningene elever kan ha innenfor brøk.

2.1 Misoppfatninger

Å feile er en naturlig del av matematikkinnlæringen, og i mange tilfeller kan feilsvar føre til god læring. At elever svarer feil kan skyldes ulike forhold, blant annet uoppmerksomhet eller at de ikke leser oppgaveteksten godt nok. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, mens en *misoppfatning* skyldes bestemte tankemønstre og vil dermed opptre systematisk. Brekke (2002, s. 10) definerer misoppfatninger som ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Som lærer er det viktig å skille mellom feil og misoppfatninger hos elevene, og ha kunnskap om hvordan misoppfatninger oppstår.

Når elever møter nytt lærestoff, vil de på bakgrunn av tidligere læring se etter likheter mellom ny og gammel kunnskap, og trekke ut eller abstrahere felles karaktertrekk for å forme et system (Ashlock, 2001, s. 5). Dette kan resultere i feilmønstre. Å få elevene til å forstå at de begreper de danner, ofte ikke kan benyttes i nye situasjoner, er et sentralt problem i matematikkundervisningen (Brekke, 2002, s. 10). Dette henger gjerne sammen med manglende forståelse for emnet. I noen tilfeller vil misoppfatningene gi riktig svar på en oppgave, og da vil bruken av feilprosedyren forsterkes. Misoppfatninger skyldes altså overgeneralisering av kunnskap, samt at elevene ikke har god nok forståelse eller innehar de forutsetninger som kreves for å tilegne seg nytt lærestoff (Ashlock, 2001, s. 6).

At misoppfatninger og delvise begreper blir dannet hos elevene er vanskelig å unngå, ettersom de er en del av barns normale utvikling. For at misoppfatningene ikke skal vedvare er det avgjørende at læreren er i stand til å hjelpe elevene over på rett tankemønster. I følge Brekke (2002. s. 11) kan misoppfatninger som ikke blir korrigert, følge elevene gjennom hele skoletiden og senere i livet.

2.2 Diagnostisk undervisningspraksis

Tanken bak diagnostisk undervisningspraksis er at elevene kan ha feilaktige eller uheldige matematiske tankemønstre som hemmer prestasjonene deres. For at misoppfatninger ikke skal hindre videre læring, er det viktig at de avdekkes så tidlig som mulig, og dette kan gjøres ved hjelp av diagnostiske oppgaver.

2.2.1 Diagnostiske oppgaver

Prøver i matematikk blir ofte gitt til elevene etter endt undervisningsperiode for å måle hvilke ferdigheter elevene har tilegnet seg. Diagnostiske oppgaver derimot, har et annerledes formål, og kan gjerne komme *før* en undervisningssekvens. I motsetning til vanlige prøver er ikke hovedhensikten til diagnostiske oppgaver å vurdere elever etter en poengsum, men å oppdage hvilke tanker og vansker de har om ulike begreper (Brekke, 2002, s. 16). På denne måten kan diagnostiske oppgaver identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, både før og etter undervisning om et emne. Ved å kartlegge hvilke løsningsstrategier elevene bruker får læreren mulighet til å korrigere eller videreutvikle elevenes eksisterende tankegang. På denne måten gir diagnostiske oppgaver læreren hjelp med å planlegge og tilrettelegge undervisningen (Brekke, 2002, s. 16).

2.2.2 Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning er en arbeidsmåte der det bevisst fokuseres på de misoppfatninger elevene har. Det handler om å kjenne elevenes styrker og svakheter, og planlegge undervisningen på bakgrunn av dette (Ashlock, 2001, s. 9). Elevene er sjelden oppmerksomme på sine egne misoppfatninger, men ved å kartlegge disse ved hjelp av diagnostiske oppgaver får læreren et godt utgangspunkt for undervisningen. I tillegg er det ønskelig å skape kognitive konflikter, slik at elevene må endre sine mentale strukturer (Gustavsen, Hinna & Rinvold, 2012, s. 890). Dette gjøres ved å velge aktiviteter og oppgaver som utfordrer elevenes misoppfatninger.

Forskning viser at vanlige undervisningsmetoder er ineffektive når det gjelder å hjelpe elever med misoppfatninger (Brekke, 2002, s. 11). Diagnostisk undervisning har imidlertid vist seg å gi større fremgang, blant annet fordi det innebærer samarbeid og utveksling av tankemønstre i plenum. Gjennom refleksjon og diskusjon med andre, kan elevene resonnere seg fram til nye løsningsmetoder, og dette har vist seg å resultere i økt læringsutbytte (Brekke, 2002, s. 22-23).

Brekke (2002, s. 19) kategoriserer diagnostisk undervisning i fire faser:

1. Identifisere misoppfatninger hos elevene
2. Tilrettelegge undervisningen slik at det skapes kognitive konflikter
3. Løse den kognitive konflikten gjennom refleksjon og samhandling
4. Bruke det utvidede begrepet i nye sammenhenger

Den siste fasen er med på å konsolidere den nye lærdommen (Gustavsen et al., 2012, s. 898). For å sikre at misoppfatningen ikke forblir hos eleven er det viktig å bruke den nye kunnskapen i nye situasjoner. Intensjonen med diagnostisk undervisning er at misoppfatninger skal endres til korrekt forståelse av et emne.

Jeg vil videre utdype teoriene bak diagnostisk undervisning; kognitivisme og konstruktivisme.

2.3 Kognitivisme og konstruktivisme

Kognitivismen er en psykologisk retning som fokuserer på intellektuelle prosesser som hukommelse, tenkning, problemløsning og læring (Imsen, 2014, s. 41). Sentrale spørsmål er hvordan hjernen organiserer kunnskap, hvordan vi husker og tenker, og hvordan vi skaper systemer. I et kognitivt perspektiv defineres læring som *endring av mentale strukturer,* og innebærer at den lærende konstruerer sin egen kunnskap (Gustavsen et al., 2012, s. 770-771). Denne teorien innenfor kognitivisme, kalles konstruktivisme.

Konstruktivisme er en teori både om hva kunnskap er, og hvordan mennesker tilegner seg kunnskap. I et slikt perspektiv skjer ikke læring passivt, men ved at den lærende arbeider aktivt i prosessen (Gustavsen et al., 2012, s. 773). Konstruktivistene hevder altså at kunnskap er noe som bare finnes i menneskenes hoder. Læring krever arbeid, og kunnskap konstrueres inne i den enkelte, avhengig av refleksjoner og tanker man gjør seg rundt ulike erfaringer.

2.4 Jean Piagets teori

Jean Piaget (1896-1980) er en framtredende eksponent for konstruktivismen, og hevder at læring skjer når vi aktivt velger ut, tolker og tilpasser stimulering til vårt eget system. Hans teorier får støtte av nyere forskning om matematikkinnlæring som en konstruktiv prosess (Gustavsen et al., 2012, s. 779). I følge Piaget er læringsprosesser kjennetegnet av tre aspekter:

1. Endring av kognitive strukturer
2. Læring i interaksjon med omgivelsene
3. Motivasjon

2.4.1 Endring av kognitive strukturer

Først og fremst innebærer læring endring av *kognitive strukturer*. Alle mennesker har noen forestillinger om verden, som billedlig talt er byggverk av kunnskaper. Disse byggverkene kalles for kognitive strukturer og er satt sammen av ulike *skjema* (Gustavsen et al., 2012, s. 774). Disse skjemaene utgjør forestillinger og erfaringer om ting eller sammenhenger, og flere skjema koblet sammen i logiske sekvenser utgjør våre kognitive strukturer.

I matematikk utvikler elever skjema for de fire regneartene, plassverdisystemet, desimaltall, brøk etc. Disse skjemaene vil utvikles etter hvert som elevene får flere erfaringer med lærestoffet. Som matematikklærer er det viktig å være i stand til å avdekke eventuelle mangler ved elevenes skjema, og dette forutsetter at læreren selv har godt utviklede kognitive strukturer (Gustavsen et al., 2012, s. 775).

2.4.2 Læring i interaksjon med omgivelsene

Læring skjer i interaksjon med omgivelsene våre. Via sansene våre kan vi utforske, øve, teste, prøve og feile. Samtidig som vi erfarer og lærer, må vi mentalt tilpasse oss våre omgivelser, og dette omtaler Piaget som adaptasjonsprosessen (Gustavsen et al., 2012, s. 775). Adaptasjon kan skje gjennom to ulike prosesser: *assimilasjon* og *akkomodasjon*.

Den første prosessen kalles assimilasjon. Her forstås og tolkes nye sanseinntrykk ved hjelp av etablerte skjemaer (Imsen, 2014, s. 151). Skjemaene forandres ikke, men nye inntrykk tilpasses eller tilordnes de skjemaene vi allerede har. Dette kan for eksempel skje når en elev har et skjema for egenskapen firkant, og så møter han flere typer firkanter i undervisningen. Da vil eleven oppdage at både et kvadrat, parallellogram, trapes og en rombe kan kategoriseres som firkanter. Gjennom assimilasjon har eleven føyet de nye sanseinntrykkene til skjemaet firkant (Gustavsen et al., 2012, s. 776).

Den andre prosessen er akkomodasjon. Den trer i funksjon når de gamle skjemaene ikke er tilstrekkelige, og det skjer en reorganisering eller en utvidelse av skjemaene (Imsen, 2014, s. 152). Dette oppstår når ny informasjon ikke passer inn i eksisterende skjemaer, slik at vi må tilpasse skjemaene. Piaget mener at akkomodasjon er å endre de kognitive strukturene slik at man kan forstå det nye (Gustavsen et al., 2012, s. 776). Dersom en elev har erfart at multiplikasjon av naturlige tall alltid får et produkt som er større enn faktorene, kan eleven støte på et problem når det skal multipliseres med brøk. Her kan det oppstå en kognitiv konflikt hos eleven, som fører til at skjemaet om multiplikasjon må justeres. Akkomodasjon kan også føre til at skjemaene blir mer finmasket (Imsen, 2014, s. 153).

I følge Piaget foregår assimilasjon og akkomodasjon samtidig, og de utfyller hverandre (Gustavsen et al., 2012, s. 776). Vi kan si at assimilasjonsprosessen underbygger og styrker akkomodasjonsprosessen. Allikevel er det akkomodasjon som er den grunnleggende læringsprosessen. Det er her det foregår utvikling og læring, som et resultat av en vekselvirkning mellom elever og omgivelsene (Imsen, 2014, s. 153).

2.4.3 Motivasjon

Det tredje aspektet i læringsprosessen handler om motivasjon. Piagets motivasjonsprinsipp kalles for *ekvilibrasjon*, og ses i sammenheng med ønsket om å opprettholde likevekt (Gustavsen et al., 2012, s. 778). Når vi kommer i situasjoner hvor vi ikke forstår, vil det oppstå en ubalanse mellom vår tolkning av situasjonen, og den tidligere etablerte forståelsen vår. Ekvilibrasjonen er en medfødt, selvregulerende prosess som settes i gang når vi står ovenfor en slik utfordring. Her ligger drivkraften i den intellektuelle utviklingen og i læringsprosessen (Imsen, 2014, s. 154). Piaget hevder altså at motivasjon er en *indre* drivkraft.

2.5 Brøk

Alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall, og $b \neq 0$, kalles for brøker (Solem, Alseth & Nordberg, 2010, s. 85). En brøk består av tre deler: teller, nevner og brøkstrek. Tallet over brøkstreken kalles for teller, og representerer hvor mange like deler vi har. Tallet under brøkstreken, nevneren, viser hvor mange like deler det finnes totalt. Brøk gir oss mulighet til å uttrykke tallstørrelser mellom de hele tallene. Historisk ble brøknotasjon innført for at alle kvotienter skulle kunne uttrykkes eksakt, utover det desimaltallsystemet er i stand til (McIntosh, 2007, s. 23).

Brøk er et mangesidig begrep, og kan sees på som:

- Del av en helhet
- En størrelse eller et tall på tallinja
- En størrelse i forhold til virkeligheten (målestokk)
- Et regnestykke
- Resultatet av en divisjon

(Alseth, 1998, s. 44)

Elevers første møte med brøk starter gjerne gjennom stambrøker (Solem et al., 2010, s. 88). Stambrøker er brøker med teller lik én, og et positivt heltall som nevner. Dersom vi deler en enhet inn i like store deler, vil hver og én av disse delene være en stambrøk. Det er viktig å få elevene til å forstå at helheten må deles inn i like deler, for at brøken skal uttrykke korrekt verdi (Laird, Marsden & Petit, 2010, s. 10).

En forutsetning for å kunne regne med brøk, samt en sentral del av tallforståelsen, er at elevene forstår likeverdige brøker (McIntosh, 2007, s. 29). To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er likeverdige hvis det finnes et k slik at $a \cdot k = c$ og $b \cdot k = d$ (Gustavsen et al., 2012, s. 152). Brøkene er altså ikke «like» i den forstand at de består av identiske tall, men de uttrykker samme størrelse eller mengde. Likeverdige brøker kan vi få dersom vi multipliserer teller og nevner med samme faktor, på samme måte som vi kan dividere tallene i brøken med samme divisor.

Det faktum at teller og nevner sammen uttrykker en del av en helhet, gjør brøk til et relativt begrep. Det betyr at den størrelsen som uttrykkes ved en brøkdel, kun kan forstås når brøkdelen ses i relasjon til helheten. (Solem et al., 2010, s. 85). «Halvparter» er ikke alltid like store, ettersom dette avhenger av tallenes størrelse. For eksempel vil halvparten av ti biler være 5, mens halvparten av 100 biler er 50. Selv om alle likeverdige brøker til $\frac{1}{2}$ uttrykker lik verdi av en helhet, kan antall objekter variere.

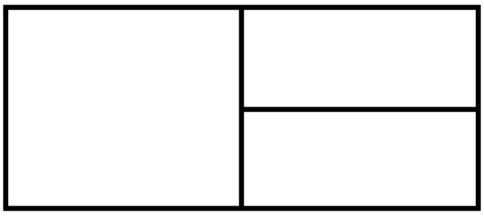
2.6 Misoppfatninger innenfor brøk

Mange barn synes det er vanskelig å gå fra hele tall til brøk, og ifølge Brekke (2002, s. 10) er dette en kritisk fase i læringen av matematikk. Det kan skyldes at skrivemåten til brøk er annerledes enn for de hele tallene, og det er ikke like lett å sortere tallene etter størrelse. Elever har ofte ingen vansker med å se hvilket tall som er størst av 20 og 100, men i brøk er det ikke nødvendigvis slik at den brøken med flest sifre uttrykker den største mengden. Når elevene skal sammenlikne størrelsen til to brøker, vil det ikke være tilstrekkelig å kun se på tallenes sifre, ettersom vi må se på forholdet mellom teller og nevner.

Forskning viser at barn generaliserer ny kunnskap på bakgrunn av tidligere erfaringer, og dette kan føre til misoppfatninger (Brekke, 2002, s. 11). Når elever skal lære om brøk vil mange se på teller og nevner som to adskilte tall, og ikke som en helhet. Dette er med på å gjøre brøk til et komplisert emne. Jeg vil nå trekke frem noen av de vanligste misoppfatningene som kan forekomme.

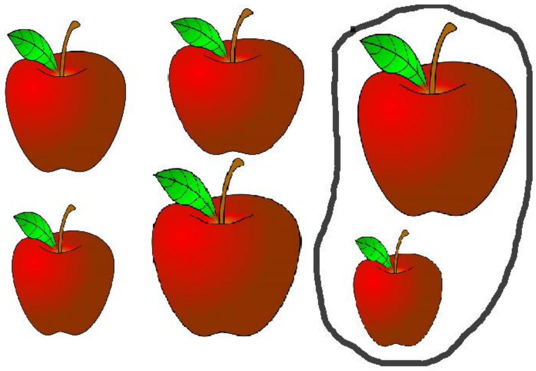
2.6.1 Brøk som en del av en helhet

En av de vanligste misoppfatningene knyttet til brøk som en del av en hel, er at elevene ikke tar hensyn til brøkdelenes størrelse (McIntosh, 2007, s. 23). Elever lærer tidlig å halvere, og bruker ofte halveringsstrategier for å dele en figur inn i ulike deler. Dersom en elev skal dele inn et rektangel i tre deler kan eleven først halvere



Figur 1 Inndeling av rektangel

rektanglet, og deretter halvere den ene halvdelen slik at vi får to firedeler. Dette rektanglet vil nå bestå av tre deler; én halvdel og to firedeler, se Figur 1. Om eleven ikke tar hensyn til at brøkdelene må være like, vil eleven tenke at hver av delene en tredel.



Figur 2 Ulik størrelse på objektene

Elever møter også brøk som en del av en mengde. Dersom elevene allerede har hatt undervisning om å dele en figur inn i like store deler, kan elevene danne seg en oppfatning av at delene til en mengde også må være av lik størrelse (Laird et al., 2010, s. 10). Dersom eleven får i oppgave om å sette ring rundt $\frac{2}{6}$ av 6 epler, kan de møte på en utfordring dersom eplene ikke har lik størrelse, selv om størrelsen er irrelevant i denne sammenheng. Se Figur 2.

2.6.2 Brøkens størrelse

Når det gjelder størrelsen på brøken er det i hovedsak én misoppfatning som forekommer, nemlig at stor nevner indikerer stor brøk (McIntosh, s. 2007, s. 27). Dersom elevene har denne oppfatningen, vil de kun sammenlikne nevnere når de skal avgjøre om brøken er stor eller liten, uten å ta hensyn til telleren. Da kan en elev tro at $\frac{2}{12}$ er større enn $\frac{4}{5}$. En slik misoppfatning oppstår ved at elevene overfører tidligere kunnskap om tall og desimaltall, til brøk.

2.6.3 Likeverdige brøker

Hovedproblemet til mange elever er at de ikke forstår poenget med å gjøre brøker likeverdige, og gjør dette kun mekanisk ut fra en regel. En misoppfatning som oppstår på bakgrunn av manglende erfaring med likeverdige brøker, er at elevene kan tro at det ikke finnes brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$ (McIntosh, 2007, s. 29). Ved å utvide brøkene til henholdsvis $\frac{6}{10}$ og $\frac{8}{10}$ vil elevene se at det ikke stemmer.

2.6.4 Addisjon og subtraksjon med brøk

For å addere og subtrahere brøker trenger vi å finne fellesnevner. En vanlig misoppfatning er at elevene ser på teller og nevner som to uavhengige tall, og dermed generaliserer vanlige regneregler som fører til at teller og nevner blir addert/subtrahert hver for seg (Gustavsen et al., 2012, s. 153). Elever som har denne oppfatning kan svare at $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{10}$, og at $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{2}$.

2.6.5 Multiplikasjon med brøk

En misoppfatning innenfor multiplikasjon av brøker, er at elevene blander inn regnereglene for addisjon av brøk (Gustavsen et al., 2012, s. 160). Dette kan skje på minst to ulike måter. For det første kan elevene tror at de må finne fellesnevner for å kunne utføre multiplikasjonen. I tillegg kan elevene unngå å multiplisere nevnerne når de består av samme tall.

2.6.6 Brøk som en relativ størrelse

En svært viktig side ved brøkbegrepet er at helheten kan variere (Solem et al., 2010, s. 87). Når elevene lærer å sammenlikne brøker, gjøres dette med utgangspunkt i samme helhet for at svaret skal gi mening (Gustavsen et al., 2012, s. 156). Halvparten av åtte elever vil være en større andel enn én tredjedel av elevene. Hvis helheten derimot ikke er den samme, vil $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ kunne utgjøre lik andel. For eksempel vil halvparten av 200kr være 100kr, men det vil også én tredel av 300kr være. Dersom elever kun har sammenliknet brøker med lik helhet, vil det eksistere misoppfatninger om at brøkenes verdi alltid har samme forhold til hverandre.

3. Metode

I dette kapittelet beskriver jeg hva slags metode jeg har brukt i forskningsarbeidet. Jeg gjør først rede for forskningsdesignet, og deretter følger en utdypende beskrivelse av hvordan forskningsprosessen ble gjennomført. Kapittelet avsluttes med hvorvidt oppgaven er reliabel og valid.

3.1 Forskningsdesign

Samfunnsvitenskapens hensikt er å bidra med kunnskap om den sosiale virkeligheten, altså den virkeligheten som dreier seg om samhandling mellom mennesker. (Johannesen, Tufte & Christoffersen, 2010, s. 35). Innenfor samfunnsvitenskapen er det vanlig å skille mellom *kvantitative* og *kvalitative* forskningsmetoder. Forskjellen på disse metodene ligger i hvordan data registreres og analyseres. Mens kvantitative metoder anvender *tall*¸ opererer kvalitative metoder med *tekst* (Johannessen et al., 2010, s. 237). Hvilken metode man skal velge vil avhenge av problemstillingen, og hva det er mulig å gjennomføre innenfor de fastsatte tidsrammene.

I denne bacheloroppgaven, der hensikten er å belyse problemstillingen «hvilke misoppfatninger i brøk kan vi finne på 6. trinn?» har mitt valg falt på en kvalitativ tilnærming. I følge Johannessen et al. (2010, s. 32) er kvalitativ metode særlig hensiktsmessig hvis vi skal undersøke fenomener som vi ikke kjenner særlig godt, og når vi ønsker å forstå fenomener mer grundig. Ettersom jeg hadde lite kunnskap om emnet fra før, valgte jeg å gjennomføre undersøkelsen kvalitativt. Å forske kvalitativt innebærer å forstå deltakernes perspektiv, og undersøke deres erfaringer (Postholm, 2010, s. 17). Målet med denne undersøkelsen er å få innsikt i elevers misoppfatninger i brøk, og på bakgrunn av dette har jeg valgt å bruke intervju som metode.

3.2 Kvalitativt forskningsintervju

Intervju har lenge blitt ansett som en effektiv metode til å samle inn informasjon om elevenes læringsstrategier (Ashlock, 2001, s. 11). Johannessen et al. (2010, s. 136-137) skriver at intervju er et godt valg dersom forskeren har behov for å gi informantene større frihet til å uttrykke seg enn et spørreskjema tillater, slik at intervjuene kan skreddersys til informantenes situasjon. På denne måten kan forskeren avdekke ting underveis i prosessen, og kan stille oppfølgingsspørsmål dersom noe er uklart. I tillegg er sosiale fenomener komplekse, og et kvalitativt intervju gjør det mulig å få frem kompleksitet og nyanser.

Kvalitative intervjuer kan være mer eller mindre strukturerte, og mitt valg falt på et *semistrukturert intervju.* Et semistrukturert intervju vil si at forskeren har en overordnet intervjuguide som utgangspunkt for intervjuet, men rekkefølge og ulike spørsmål kan varieres (Johannessen et al., 2010, s. 137). Jeg mener at et slikt intervju gir en god balanse mellom standardisering og fleksibilitet, og det var viktig for meg å kunne stille varierte spørsmål ut i fra det elevene fortalte.

For å få innblikk i hvordan elevene løser en matematikkoppgave, er det viktig at elevene får mulighet til å forklare sin egen tankegang. Dette kan hovedsakelig gjøres på to måter. Enten kan elevene «tenke høyt» *mens* oppgaven løses, eller de kan kommentere tankeprosessen *etter* en oppgave er løst (Ashlock, 2001, s. 11). Ved å la elevene kommentere underveis, tilsikrer man at elevene ikke glemmer noe i etterkant. På bakgrunn av at mitt ønske med denne undersøkelsen er å kartlegge hvordan elevene tenker når de møter brøkoppgaver, valgte jeg å la hovedvekten ligge på elevenes forklaringer underveis i oppgaveløsningen. Allikevel er oppfølgingsspørsmål til tider nødvendig for avklaringer, og jeg har derfor benyttet en blanding av begge strategiene.

3.2.1 Informanter

Informantene består av seks elever på 6. trinn. Jeg valgte å ta kontakt med en skole jeg allerede har kjennskap til, med tanke på å øke sannsynligheten for å få tillatelse. I tillegg ønsket jeg en kjent elevgruppe, slik at situasjonen ikke skulle bli skremmende for dem. Ettersom jeg skal basere forskningen min på hvilke misoppfatninger jeg finner hos de seks informantene, var det viktig for meg å både få med noen elever som synes brøk er vanskelig, og noen forholdvis sterke elever. Johannessen et al. (2010, s. 106) skriver at strategisk utvelgelse handler om å først tenke gjennom hvilken målgruppe som kan gi nødvendige data, og så velge ut personer fra denne målgruppen. Jeg fikk hjelp av klassens kontaktlærer til å velge ut elever som har ulik kompetanse innenfor brøk, slik at jeg skulle få mest mulig nyttig informasjon.

3.2.2 Gjennomføring av prosjektet

I forkant av intervjuene fikk elevene med seg et samtykkeskjema hjem, som både eleven og foresatte måtte underskrive (se vedlegg 1). Her ble det informert om prosjektets tema og hensikt, og kontaktinformasjon dersom noe var uklart. Det ble også informert om anonymitet og elevenes mulighet til å kunne trekke seg når som helst.

Intervjuene fant sted inne på et grupperom tilknyttet klasserommet. Der fikk vi sitte i fred uten forstyrrelser. Jeg valgte å gjennomføre intervjuene individuelt for å unngå at deltakerne bevisst eller ubevisst gav samme svar som resten av gruppen, i redsel for å skille seg ut (Johannessen et al., 2010, s. 151). Det var viktig for meg å få så ærlige svar som mulig, og derfor besluttet jeg å intervjue én og én elev. I tillegg mener jeg det enklere å stille gode oppfølgingsspørsmål når man bare fokuserer på én elevs tankegang, og ikke hopper mellom ulike strategier. Det var også en forutsetning at ikke flere snakket samtidig underveis, ettersom jeg noterte ned så mye som mulig av deres svar.

Utgangspunktet for intervjuet var min utarbeidede intervjuguide (se vedlegg 2), som består av diagnostiske oppgaver. De diagnostiske oppgavene er hentet fra to ulike kilder:

1. Alle Teller (McIntosh, 2007)
2. Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Improve Instruction (Ashlock, 2001)

Før vi begynte med oppgavene forklarte jeg elevene at jeg er ute etter å få innsikt i deres tankegang, og at jeg derfor kom til å stille spørsmål etter hver eneste oppgave. Da ble elevene forberedt på at de ville få spørsmål om hvordan de kom frem til svaret, uavhengig av om svaret var korrekt eller ukorrekt. Før elevene fikk skrive ned sitt svar leste jeg oppgaveteksten høyt, og forsikret meg om at de hadde forstått hva de skulle gjøre. På flere av oppgavene ba jeg elevene også om å tenke høyt *mens* oppgaven ble løst, slik at jeg fikk innblikk i hele tankeprosessen.

3.2.3 Valg av analyse

For å analysere dataene fra det kvalitative intervjuet har jeg valgt å benytte meg av et fenomenologisk design. I fenomenologiske analyser er forskeren opptatt av *innholdet* i datamaterialet (Johannessen et al., 2010, s. 173), for å få innsikt i hvordan en person forstår et gitt fenomen, som i dette tilfellet er brøk. En slik analyse er egnet til å utvikle kunnskap fra et innenfra-perspektiv, og søker å beskrive og avdekke heller enn å forklare og predikere.

Analysens hovedsteg består i å sammenfatte meningsinnholdet, kode og kategorisere informasjonen, og å sammenfatte materialet for å utforme nye beskrivelser. Jeg har valgt å systematisere datamaterialet i følgende seks kodekategorier:

1. Brøk som en del av en helhet
2. Brøkens størrelse
3. Likeverdige brøker
4. Addisjon og subtraksjon med brøk
5. Multiplikasjon med brøk
6. Brøk som en relativ størrelse

For å sortere materialet etter kodekategoriene har jeg valgt å bruke en tabell (se vedlegg 3). Misoppfatninger som omhandler likt tema er lagt inn i samme kategori for å sammenfatte datamaterialet. I kapittel 4, hvor jeg presenterer resultatene, er kodekategoriene benyttet som underoverskrifter.

3.2.4 Etiske hensyn

For å få tak i informasjon med kvalitet er forskeren avhengig av et tillitsforhold til deltakeren (Postholm, 2010, s. 148). Et slik tillitsforhold forsterkes ved at forskeren opptrer etisk. Etikk omhandler prinsipper og retningslinjer for vurdering av om handlinger er riktige eller gale. I løpet av forskningsarbeidet har jeg foretatt etiske overveielser både før, i løpet av og etter oppholdet på forskningsfeltet.

Forskning innebærer ofte at det samles inn data om identifiserbare enkeltpersoner, og det første jeg måtte undersøke var om prosjektet utløste meldeplikt. I følge Johannessen et al.

(2010, s. 94) er et prosjekt meldepliktig hvis det innebærer behandling av personopplysninger *og* opplysningene helt eller delvis lagres elektronisk. Ettersom opplysningene om mine informanter er anonyme, trengte ikke undersøkelsen å meldes. Jeg valgte å bruke notater som metode under innsamlingen, men notatene ble ikke navnsatt.

For å tilse at elevene fikk avklart hva undersøkelsen går ut på, valgte jeg rekruttering ved direkte kontakt (Johannessen et al., 2010, s. 113). Da fikk de mulighet til å stille spørsmål før de bestemte seg for om de ville delta. Informert samtykke innebærer at forskningsdeltakerne informeres om undersøkelsens mål, at det er frivillig deltakelse og at de kan trekke seg når som helst (Brinkmann & Kvale, 2015, s. 104). Før jeg gjennomførte intervjuene fikk jeg både elevens og foreldrenes samtykke.

3.3 Reliabilitet og validitet

Et grunnleggende spørsmål i forskning dreier seg om dataenes *reliabilitet.* Reliabilitet knytter seg til nøyaktigheten av undersøkelsens data, og sier noe som målesikkerhet (Johannessen et al., 2010, s. 40). Jeg valgte å benytte intervju som metode på bakgrunn av min problemstilling. Sammenliknet med en spørreundersøkelse, er det lettere å oppklare eventuelle misforståelser og mistolkninger i et intervju, og dette styrker oppgavens reliabilitet. Jeg kan med stor sikkerhet fastslå om eleven har en misoppfatning, eller om feilen skyldes uoppmerksomhet, gjetting, ukonsentrasjon etc.

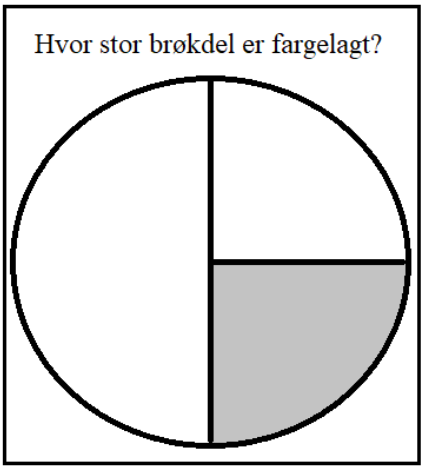
Oppgavens *validitet* sier noe om gyldigheten av resultatene, altså om vi faktisk har undersøkt det som skulle undersøkes (Brinkmann & Kvale, 2015, s. 276). Intervjuguiden er basert på kartleggingsoppgavene til McIntosh (2007), og på diagnostiske brøkoppgaver hentet fra Ashlock (2001). Ved å bruke diagnostiske oppgaver som fremprovoserer misoppfatninger, vil intervjuguiden i stor grad gi svar på problemstillingens spørsmål. Siden oppgavene er hentet fra kartleggingsverk og tidligere forskning, tilsikres god kvalitet på oppgavene, og dette er med på å styrke undersøkelsens validitet. Det er derimot vanskelig å generalisere funnene i denne oppgaven, ettersom det er få informanter som kun er hentet fra én klasse. Allikevel er det grunn til å tro at andre elever også kan ha disse misoppfatningene.

4. Resultater

I dette kapittelet presenterer jeg dataene fra det kvalitative forskningsintervjuet. Som tidligere nevnt i kapittel 3.2.3 har jeg valgt å benytte kodekategoriene som underoverskrifter for å dele inn kapittelet. For hver kategori vil jeg trekke frem oppgaver som viser hvilke misoppfatninger som er funnet innenfor denne kategorien.

4.1 Brøk som en del av en helhet

De diagnostiske oppgavene er laget med den hensikt å avdekke elevenes misoppfatninger. Figur 3 viser en sirkel som er delt inn i tre deler, der én av delene er fargelagt. Disse tre delene er derimot ikke like store, og elevenes svar på denne oppgaven vil avdekke om de har forståelse for at delene til et objekt skal ha likt areal. Dersom en elev ikke har denne forståelsen vil svaret bli galt.



Figur 3 Brøk som en del av en helhet

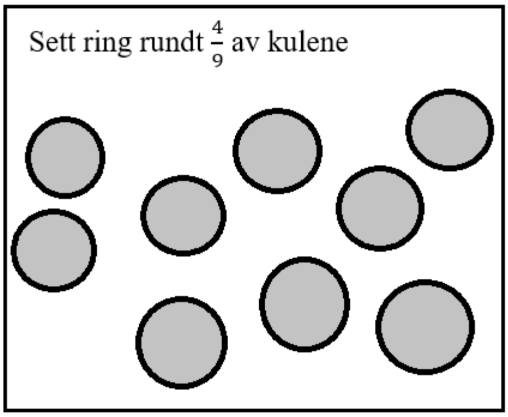
Tre av seks elever på 6. trinn svarte feil på denne oppgaven.

Elev 1, 3 og 6 svarte:

> «Det er $\frac{1}{3}$ av figuren som er fargelagt fordi figuren er delt inn i tre deler. Siden det er 3 deler totalt skal det stå 3 i nevneren, og 1 i telleren fordi det bare er én del som er fargelagt»

Disse elevene viser at de ikke tar hensyn til brøkdelenes størrelse når de skal angi hvor stor del som er fargelagt. I løpet av intervjuet svarte de samme elevene feil på samtlige brøkoppgaver innenfor samme kategori. Når feil opptrer systematisk, kaller vi det for en misoppfatning, og jeg kan dermed konkludere med at disse elevene har en misoppfatning om at delene ikke trenger å være like store. Denne misoppfatningen bør oppdages tidlig, ettersom dette er meget grunnleggende kunnskap for å forstå brøk.

Figur 4 viser en oppgave som omhandler brøk som en del av en mengde. I motsetning til Figur 3 ser vi nå at det ikke er ett objekt som skal deles inn, men flere separate objekter. I slike oppgaver trenger vi ikke ta hensyn til objektenes størrelse, ettersom vi er ute etter å finne et antall objekter. Elevene som svarte feil på forrige type oppgave svarte korrekt her, mens to av elevene som svarte rett på forrige oppgave fikk en utfordring.



Figur 4 Brøk som del av en mengde

Elev 4 og 5 svarte:

> «Det er 9 kuler totalt, så ut i fra tallene i brøken skal jeg sette ring rundt 4 kuler. Problemet er at kulene ikke er like store. Hvis jeg setter ring rundt 4 kuler blir det ikke lik del fordi det blir unøyaktig, ettersom noen kuler er større enn andre»

Disse elevene presiserer at de har forståelse for at brøkdeler skal være like store, og har overgeneralisert denne kunnskapen til slike oppgaver. Elevene forstod at det måtte være fire kuler som skulle ringes rundt, men de var ikke helt fornøyd med svaret fordi det ble unøyaktig. Elevene har altså misoppfattet forskjellen mellom denne type oppgaver, ettersom størrelsen på objektene ikke er viktig når det er separate objekter vi omtaler (Larid et al., 2010, s.10).

4.2 Brøkens størrelse

Størrelsen på en brøk er alltid sett i forhold til en helhet, og det er viktig at elevene får en forståelse for dette. For å beregne brøkens størrelse må elevene vite at jo større nevneren er, jo flere biter er brøken delt inn i. I tillegg må vi se på telleren for å kunne anslå hvor mange av disse bitene vi har. Figur 5 viser en diagnostisk oppgave som vil avsløre om elevene har misoppfatninger tilknyttet størrelsen på tallene i en brøk.

Sett ring rundt den største brøken:

$\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$

Figur 5 Brøkens størrelse

På oppgaven i figur 5 svarte elev 1:

«$\frac{5}{9}$ er størst fordi 9 er det største tallet av alle»

En slik misoppfatning viser at eleven overgeneraliserer kunnskap om hele tall. Hadde det bare stått 6 og 9, er det korrekt at 9 er det største tallet. Når vi skal avgjøre størrelsen på brøker, må vi derimot ta både teller og nevner i betraktning. En slik tenkemåte vil kollidere med elevens tidligere skjema, ettersom større nevner indikerer *mindre* brøk. I dette tilfellet hvor alle tellerne er lik 5, vil det være brøken med den minste nevneren som er størst. Det er viktig at elever med slik tankegang presenteres for en kognitiv konflikt, slik at en akkomodasjonsprosess settes i gang. Kunnskap om brøkens størrelse er grunnleggende for å forstå hva brøk er, og dermed er det viktig at elevene får endret slike misoppfatninger.

4.3 Likeverdige brøker

Skriv en annen brøk som har lik verdi:

$\frac{3}{4} =$ $\frac{4}{6} =$

Figur 6 Likeverdige brøker

Å forstå likeverdige brøker er en sentral del av tallforståelse i brøk, og også en forutsetning for å kunne utføre regneoperasjoner med brøk. Figur 6 og 7 viser oppgaver som vil avsløre om elever har misoppfatninger tilknyttet likeverdige brøker. Det viste seg at ikke alle elevene har det klart for seg hva likeverdige brøker innebærer. På slike oppgaver som figur 6 representerer svarte elev 1:

«$\frac{3}{4}$ er det samme som $\frac{9}{10}$ fordi det må være like stort mellomrom mellom tallene. Siden det bare er én i forskjell på 3 og 4, må det også være én i forskjell i den nye brøken»

Elev 6 svarte:

«For å gjøre om til likeverdige brøker må jeg plusse med det samme tallet i telleren og nevneren. Hvis jeg har $\frac{4}{6}$ og plusser med 1 oppe og nede får jeg $\frac{5}{7}$»

Disse elevene viser manglende forståelse for hva likeverdige brøker innebærer. Elev 1 misoppfatter at det må være lik differanse mellom tallene, og tar ikke hensyn til at brøkene skal ha samme verdi. Elev 6 sier at vi må addere med likt tall oppe i teller og nevner, og bruker dermed feil regneart.

Til tross for at elev 2, 3, 4 og 5 viste god forståelse for hvordan vi kan finne likeverdige brøker, klarte de ikke å svare korrekt på oppgaven som figur 7 illustrerer. Samtlige elever svarte:

Finnes det noen brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$?

Figur 7 Brøker mellom

> «Nei, det finnes ingen brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$ fordi det ikke er noen hele tall mellom 3 og 4. Det kunne vært 3,5, men det er ikke lov med desimaltall i brøk»

Dette indikerer at elevene mangler en grunnleggende forståelse for brøk. Selv om fire av seks elever klarer å finne likeverdige brøker slik som i figur 6, ser de ikke sammenhengen med dette i figur 7. McIntosh (2007, s. 29) påpeker at slike misoppfatninger ofte skyldes lite hensiktsmessig og hastig gjennomgang av begrepet, og at elevene kun lærer en metode for hva de skal gjøre, på bekostning av god forståelse.

4.4 Addisjon og subtraksjon med brøk

Addisjon og subtraksjon med brøk skiller seg fra vanlige regneregler ved at vi må finne fellesnevner. Dersom elevene har manglende forståelse for brøkbegrepet, kan regning med brøk føre til ytterlige misoppfatninger. Innlæring av algoritmer er ikke tilstrekkelig dersom forståelsen ikke er på plass. Oppgaven i figur 8 har til hensikt å avsløre elevenes misoppfatninger innenfor dette området.

Regn ut:

$\frac{2}{8} + \frac{4}{8} =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} =$ $\qquad$ $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} =$

Figur 8 Addisjon og subtraksjon med brøk

Elev 1, 5 og 6 svarte:

> «Det er bare å plusse tellerne med hverandre først, og så plusse nevnerne»

> «Når det er minus gjør jeg bare det samme som med pluss, at jeg først tar teller minus teller, og så

Regn ut:

$\frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{16}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$

$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{5}{0}$ $\qquad$ $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$

Figur 9 Elevsvar på addisjon og subtraksjon nevnerne»

Noen av elevsvarene er vist i figur 9. En slik misoppfatning skyldes at elevene overgeneraliserer kunnskap fra regning med hele tall, og ser på teller og nevner som to adskilte tall. Det faktum at elevene skriver at det ene svaret blir $\frac{5}{0}$ viser manglende brøkforståelse, ettersom dette ikke er en gyldig brøk. For å endre slike misoppfatninger bør elevene få løse oppgaver med konkreter for å visualisere regningen, for eksempel med klosser eller brøkstaver.

4.5 Multiplikasjon med brøk

Når det gjelder multiplikasjon med brøk (se figur 10) viste det seg at de elevene som regnet feil med addisjon og subtraksjon, regnet riktig her. De tre elevene som regnet korrekt med fellesnevner i figur 8, overførte imidlertid disse regnereglene til multiplikasjonsregning. Figur 11 viser noen av elevsvarene.

Regn ut:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} =$$

Figur 10 Multiplikasjon

Elev 2, 3 og 4 svarte her:

> «Når vi regner med brøk må vi alltid finne fellesnevner, og fellesnevnerne skal ikke regnes sammen. Derfor skal bare tellerne ganges sammen»

Regn ut:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{6}$$

Figur 11 Elevsvar multiplikasjon

Dette viser at elevene ikke skiller mellom regnereglene for addisjon/subtraksjon og multiplikasjon. Om dette bunner i rask og uklar gjennomgang eller feiltolkning hos elevene er vanskelig å si, men elevene var veldig tydelig på at det var slik de skulle regne. Igjen viser dette manglende forståelse for brøk, og elevene klarer heller ikke å vurdere om svaret de har fått er korrekt.

4.6 Brøk som en relativ størrelse

At brøk er en relativ størrelse betyr at størrelsen som uttrykkes ved en brøkdel kun kan forstås når brøkdelen ses i relasjon til helheten. Dersom elever bare har fått erfaring med at brøker sammenliknes ut i fra samme helhet, kan det oppstå misoppfatninger som at brøkenes verdi alltid har likt forhold til hverandre. I figur 12 ser vi en oppgave som vil avsløre om elevene klarer å se på brøk som en relativ størrelse.

> Lise og Lars drar til butikken for å kjøpe leker med sparepengene sine. Lise bruker $\frac{1}{2}$ av sparepengene sine, og Lars bruker $\frac{1}{4}$ av sparepengene sine.
>
> Er det mulig at Lars har brukt mer penger enn Lise?

Figur 12 Brøk som en relativ størrelse

På oppgaven i figur 12 svarte samtlige elever feil. Elev 2,3,4,5 og 6 svarte:

«Nei, det går ikke fordi $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{1}{4}$. Da kan ikke Lars ha brukt mest penger»

Elev 1 svarte «Ja» på bakgrunn av at eleven tror $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$, noe som gjenspeiler seg fra svaret i kapittel 4.2. Selv om svaret er *ja*, bygger eleven dette på feil forståelse, og jeg kan derfor ikke vurdere svaret som korrekt.

Svaret til de øvrige elevene viser at de vurderer brøkene ut i fra samme helhet. Her møter elevene en stor utfordring i forhold til de naturlige tallene, nemlig at brøk ikke alltid kan rangeres etter størrelse ut i fra tallenes verdi. Elevene forstår ikke at de to brøkene kan ha ulik helhet, og har ikke forståelse for at brøk er et relativt begrep. En slik misforståelse bunner i at elevene mangler forståelse for hva brøk egentlig uttrykker.

5. Avslutning

I denne oppgaven er formålet å sette søkelys på hvilke misoppfatninger i brøk vi kan finne på 6. trinn. Funnene fra denne undersøkelsen viser at det eksisterer misoppfatninger innenfor flere områder av brøk, og at elevenes brøkforståelse ikke er tilstrekkelig. Dette samsvarer med resultatene fra TIMSS 2015, som nevnt innledningsvis.

Funnene fra undersøkelsen er i stor grad som forventet, med tanke på det jeg har lest fra annen forskning. Det ble avdekket flere vanlige misoppfatninger, blant annet at elevene ikke tar hensyn til brøkdelenes størrelse og at de ser på teller og nevner som to separate tall. Jeg synes det er urovekkende at flere elever mangler slik grunnleggende brøkforståelse, ettersom dette danner fundamentet for videre regning med brøk, og senere algebra.

Utover de misoppfatningene jeg forventet å finne ble det også gjort noen overraskende funn. Da jeg lagde oppgaven i Figur 4, hadde jeg ingen baktanke om at kulene skulle ha ulik størrelse, og det var ren tilfeldighet at de endte opp med ulikt areal. Jeg la heller ikke merke til dette før en av de sterkeste elevene kommenterte det fordi hun fikk problemer med å løse oppgaven. Jeg ble også overrasket over at elevene i stor grad blandet sammen regneregler for addisjon og multiplikasjon, og at de som fikk rett svar med den ene regnearten, fikk feil svar med den andre. Når flere elever i tillegg oppgir $\frac{5}{0}$ som svar, og ikke vurderer at dette svaret må være feil, er det tydelig at elevene mangler forståelse for brøkbegrepet.

Jeg synes det er interessant at undersøkelsen avdekket misoppfatninger som allerede er beskrevet i flere bøker. Noen av disse kildene stammer fra tidlig 2000-tallet, og vil si at de misoppfatningene som eksisterte for mer enn ti år siden, fortsatt eksisterer i dag. Hvorfor har vi ikke klart å gjøre noe med dette?

Piagets teori om at læring er en konstruktiv prosess som skjer i kontakt med omgivelsene, kan være nyttig å vektlegge når man skal planlegge og gjennomføre undervisningen. Det er også avgjørende at lærere er i stand til å avdekke feil og mangler ved elevenes skjemaer så tidlig som mulig, for at disse ikke skal utvikle seg til misoppfatninger. Trolig er det uunngåelig å forhindre at misoppfatninger dannes, ettersom vi ikke kan kontrollere elevenes tankegang, men lærerens undervisning kan i stor grad være med på å begrense antallet. Diagnostisk undervisning og diagnostiske oppgaver er et viktig verktøy for å avdekke misoppfatninger, slik at disse kan bli korrigert. Jeg vil understreke betydningen av å gi elevene god forståelse for brøkemnet, slik at korrekte svar ikke bare stammer fra pugging av regler og algoritmer. God forståelse vil føre til færre misoppfatninger, som igjen gir korrekte svar og økt mestringsfølelse.

Mitt ønske med denne oppgaven var å få større innsikt i hva som gjør brøk til et vanskelig tema innenfor matematikken. I arbeidet med å avdekke elevenes misoppfatninger har jeg fått mye nyttig informasjon som jeg vil ta med meg videre. Jeg håper og ønsker at informasjonen om ulike misoppfatninger kan bidra til å øke læreres bevissthet om hvordan brøkundervisningen bør tilrettelegges, slik at elevene får best mulig utgangspunkt til å mestre dette temaet.

5.1 Veien videre

Arbeidet med denne oppgaven har fått meg til å reise nye spørsmål angående brøk. Med tanke på at det ble registrert misoppfatninger jeg ikke var forberedt på, undres jeg om det kan eksistere enda flere misoppfatninger som denne undersøkelsen ikke avdekket. Det kunne vært interessant å gjennomføre en undersøkelse på et større antall elever for å se om flere misoppfatninger eksisterer blant norske elever på 6. trinn. Ved å forske på et større antall elever ville jeg også kunne få et tydeligere svar på om funnene i denne oppgaven gjelder generelt i alle norske skoler. Kanskje kunne dette vært et utgangspunkt for en fremtidig masteroppgave?

Et annet spørsmål jeg har stilt meg, er om det finnes sammenhenger mellom hvordan det undervises og hvilke misoppfatninger som oppstår. Finnes det noen undervisningsmetoder som begrenser antall misoppfatninger hos elevene? For min egen del ville det vært veldig spennende å utforske slike sammenhenger, og se om det finnes et fasitsvar. Nå som læreplanen skal oppdateres, og det skal bli større fokus på dybdelæring, setter jeg også spørsmålstegn ved om dette kan føre til færre misoppfatninger. Kanskje er dybdelæring løsningen på å bedre forståelsen for brøk i den norske skolen?

Litteraturliste

Alseth B. (1998) *Matematikk på småskoletrinnet.* Utdanningsdirektoratet. Lokalisert på http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/38228_Mattem_sma.pdf

Ashlock, R. B. (2001) *Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Improve Instruction* (8. Utg). LUH

Bergem, O. K. (2016) Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.) *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-43). Oslo: Universitetsforlaget

Bergem, O. K, H. Kaarstein & T. Nilsen (2016) TIMSS 2015. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.) *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 11-21). Oslo: Universitetsforlaget

Brekke G. (2002) Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. Læringssenteret. Lokalisert på http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Brinkmann, S. & Kvale, S. (2015) *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg). Oslo: Gyldendal Akademisk

Gustavsen T. S., Hinna K.R.C. & Rinvold R.A. (2012) *QED 1-7: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen – Bind 1*. Kristiansand: Høyskoleforlaget

Imsen, G. (2014) *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg.) Oslo: Universitetsforlaget

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010) *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* (4. utg.) Oslo: Abstrakt forlag AS

Laird, R.E., Marsden, E.L. & Petit, M.M. (2010). A focus on Fractions: Bringing research to the classroom. New York: Routledge

McIntosh, Alistair (2007) *Alle teller: Kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området.* Matematikksenteret

Postholm, M. B. (2010) *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg). Oslo: Universitetsforlaget AS

Solem, I. H., Alseth, B. & Nordberg G. (2010) *Tall og tanke - Matematikkundervisning på 1. til 4. trinn*. Oslo: Gyldendal Akademisk

Utdanningsdirektoratet (2013) *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Figurliste

Vedlegg

Vedlegg 1 - Samtykkeerklæring

Samtykkeerklæring for deltakelse i forskningsprosjekt knyttet til bacheloroppgave

Beskrivelse av prosjektoppgaven

Mitt navn er Anette Tveterhagen Løkken, og jeg er student ved Høyskolen i Innlandet, avdeling Hamar. I forbindelse med mitt tredje studieår på grunnskolelærerutdanningen, skal jeg skrive en bacheloroppgave. I denne sammenheng ønsker jeg å intervjue elever om temaet brøk.

Hensikten med prosjektet er å få innblikk i eventuelle misoppfatninger som eksisterer på sjettetrinn, og dermed få bedre innsikt i hvilke vansker som kan oppstå i forbindelse med brøkinnlæring. For å avdekke dette ønsker jeg å gjennomføre en diagnostisk test. Elevene vil få tildelt et utvalg brøkoppgaver som vil avsløre eventuelle misoppfatninger innenfor temaet. Mens elevene løser oppgavene ønsker jeg å stille noen spørsmål, som har til hensikt å gi meg som student innblikk i elevenes tankegang i forbindelse med oppgaveløsningene. Notater fra intervjuet vil bli skrevet ned, og brukt til å drøfte og reflektere rundt teori som omhandler samme tema.

Frivillig deltakelse

Deltakelsen i undersøkelsen er frivillig, og eleven kan når som helst trekke seg uten begrunnelse. Jeg vil notere underveis, men ikke bruke noen form for opptak. Dersom eleven ønsker å avbryte, kan også informasjonen som er gitt hittil i intervjuet trekkes tilbake.

Anonymitet

Bacheloroppgaven, samt notatene fra intervjuene, vil bli anonymisert. Det vil si at informasjonen som kommer fra elevene, ikke skal kunne knyttes opp mot enkeltpersoner. Som lærerstudent ved Høyskolen i Innlandet har jeg full taushetsplikt, og informasjonen som blir gitt vil kun bli brukt til å belyse oppgavens problemstilling. I forkant av intervjuene ber jeg foresatte om å samtykke i at deres barn deltar, ved å undertegne på at informasjonen på dette arket er lest og forstått.

Kontakt

Ta gjerne kontakt dersom det er noen spørsmål knyttet til forskningsprosjektet:

Tlf: 98 68 51 67

Epost: anette93@outlook.com

Jeg setter stor pris på deres samarbeid!

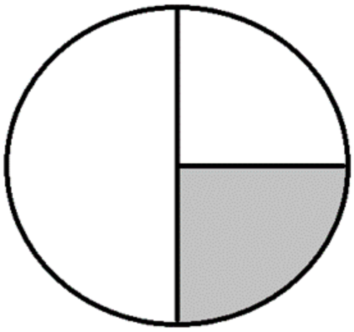
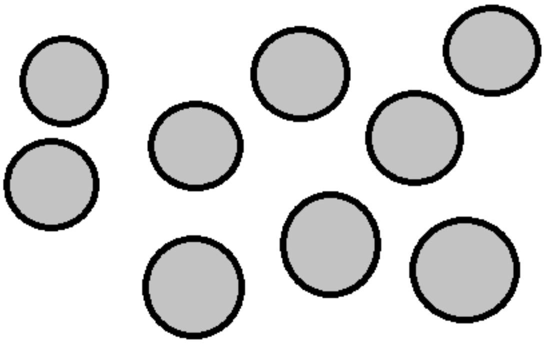
Samtykke

Vi har lest og forstått informasjonen over, og gir vårt samtykke til å la eleven delta i intervjuet.

Sted og dato　　　　　Signatur foresatte

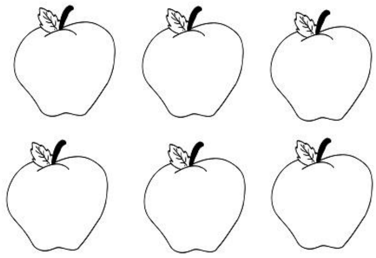
Signatur elev

Vedlegg 2 – Intervjuguide

1. Hvor stor brøkdel er fargelagt? _______________	
2. Sett ring rundt $\frac{4}{9}$ av kulene	
3. Fargelegg $\frac{3}{4}$ av rektangelet	
4. Tegn en figur som passer til $\frac{2}{5}$	

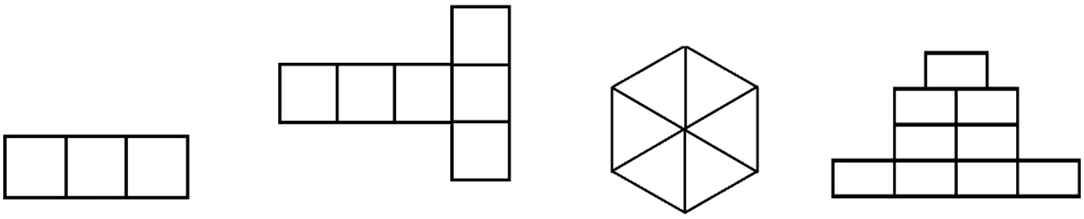
5.

Sett ring rundt $\frac{1}{3}$ av eplene



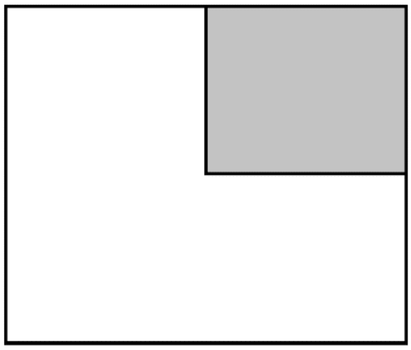
6.

Fargelegg $\frac{2}{3}$ av disse figurene



7.

Er $\frac{1}{4}$ av kvadratet skravert?



Ja/nei: ____________

Hvorfor/hvorfor ikke?

____

____

8.

Knut deler eplet sitt i to. Deretter deler

han den ene halvdelen i to igjen.

Hvor mange eplebiter har han nå? ________________

Hvor stor del av hele eplet er én av de minste bitene? ________________

9.

Sett ring rundt den største brøken:

$\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$

10.

Er $\frac{2}{5}$ større eller mindre enn $\frac{1}{2}$? __________________

Hvorfor? ____

____

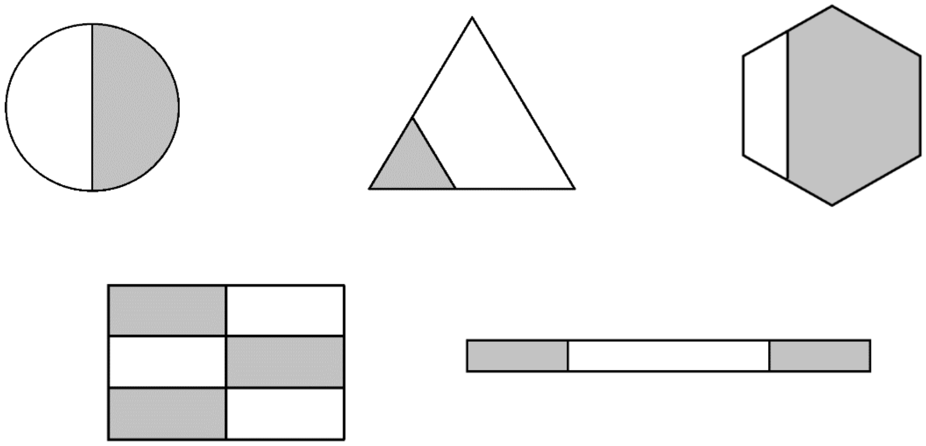
Er $\frac{1}{1}$ større eller mindre enn $\frac{9}{10}$? __________________

Hvorfor? ____

____

11.

Sett en ring rundt de figurene der $\frac{1}{2}$ er fargelagt:



12.

Skriv en annen brøk som har lik verdi:

$\frac{1}{2} =$ $\frac{3}{6} =$

$\frac{3}{4} =$ $\frac{4}{6} =$

13.

Fyll inn tallene som mangler:

$\frac{1}{4} = \frac{}{8}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{}$ $\frac{2}{4} = \frac{}{12}$

14.

Regn ut:

$\frac{2}{8} + \frac{4}{8} =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} =$

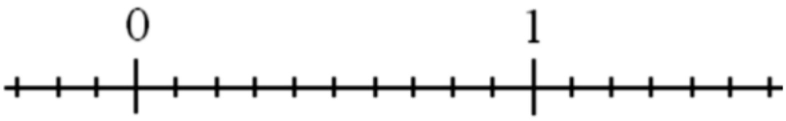
$\frac{7}{8} - \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} =$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} =$

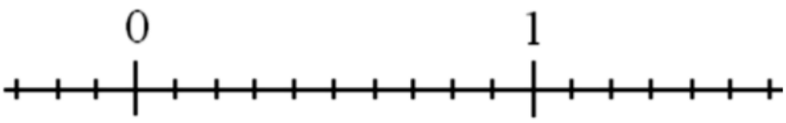
15.

Skriv brøkene $\frac{1}{10}$ og $\frac{4}{5}$ på riktig plass på tallinja under:



16.

Skriv brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ på riktig plass på tallinja under:



17.

Lise og Lars drar til butikken for

å kjøpe leker med sparepengene sine.

Lise bruker $\frac{1}{2}$ av sparepengene sine,

og Lars bruker $\frac{1}{4}$ av sparepengene sine.

Er det mulig at Lars har brukt mer

penger enn Lise?

Hvorfor/hvorfor ikke? ____

____

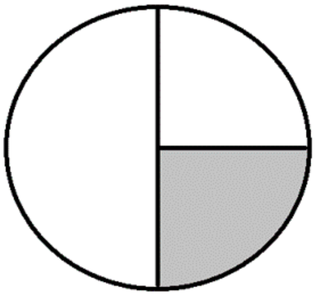
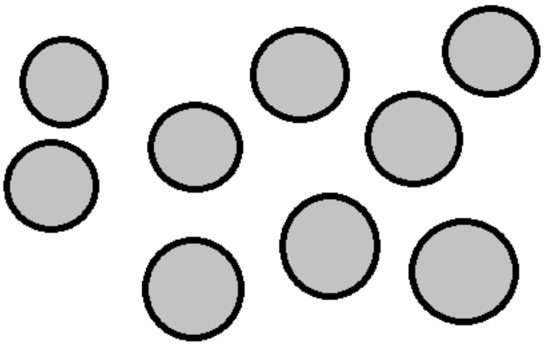
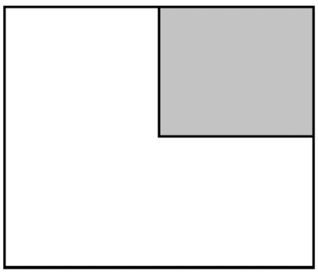
18.

Finnes det noen brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$? ____________________________

Hvorfor/hvorfor ikke? ____

____

Vedlegg 3 – Resultater

Brøk som en del av en helhet	
Oppgaven	Elevenes svar
Hvor stor brøkdel er fargelagt? 	Elev 2, 4 og 5 svarte: $\frac{1}{4}$ Elev 1,3 og 6 svarte: «Det er $\frac{1}{3}$ av figuren som er fargelagt fordi figuren er delt inn i tre deler. Siden det er 3 deler totalt skal det stå 3 i nevneren, og 1 i telleren fordi det bare er én del som er fargelagt»
Sett ring rundt $\frac{4}{9}$ av kulene. 	Elev 1, 2, 3 og 6 svarte korrekt ved å telle fire kuler og sette ring rundt disse. Elev 4 og 5 svarte: «Det er 9 kuler totalt, så ut i fra tallene i brøken skal jeg sette ring rundt 4 kuler. Problemet er at kulene ikke er like store. Hvis jeg setter ring rundt 4 kuler blir det ikke lik del fordi det blir unøyaktig, ettersom noen kuler er større enn andre»
Er $\frac{1}{4}$ av kvadratet skravert? Hvorfor/hvorfor ikke? 	Elev 2, 4 og 5 svarte korrekt umiddelbart. Elev 6 tegnet opp streker for å se at det var likt. Elev 1 og 3 svarte: «Nei, fordi det er bare en firkant og ikke streker mellom, så da er det ikke likt. Det må være delt opp for å være likt og det er det ikke»

<table>
<tr><td colspan="2">Brøkens størrelse</td></tr>
<tr><td>Oppgaven</td><td>Elevenes svar</td></tr>
<tr><td>Sett ring rundt den største brøken

$\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$</td><td>Elev 2, 3, 4, 5 og 6 svarte korrekt.

Elev 1 svarte:
«$\frac{5}{9}$ er størst fordi 9 er det største tallet av alle»</td></tr>
<tr><td colspan="2">Likeverdige brøker</td></tr>
<tr><td>Oppgaven</td><td>Elevenes svar</td></tr>
<tr><td>Skriv en annen brøk som har lik verdi:

$\frac{1}{2} =$ $\frac{3}{6} =$

$\frac{3}{4} =$ $\frac{4}{6} =$</td><td>Elev 2, 3, 4 og 5 svarte korrekt med forståelse for at vi må multiplisere teller og nevner med samme tall.

Elev 1 svarte:
«$\frac{3}{4}$ er det samme som $\frac{9}{10}$ fordi det må være like stort mellomrom mellom tallene. Siden det bare er én i forskjell på 3 og 4, må det også være én i forskjell i den nye brøken»

Elev 6 svarte:
«For å gjøre om til likeverdige brøker må jeg plusse med det samme tallet i telleren og nevneren. Hvis jeg har $\frac{4}{6}$ og plusser med 1 oppe og nede får jeg $\frac{5}{7}$»</td></tr>
<tr><td>Finnes det noen brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$?</td><td>Samtlige elever svarte:
«Nei, det finnes ingen brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$ fordi det ikke er noen hele tall mellom 3 og 4. Det kunne vært 3,5, men det er ikke lov med desimaltall i brøk»</td></tr>
</table>

Addisjon og subtraksjon	
Oppgaven	Elevenes svar
Regn ut: $\frac{2}{8}+\frac{4}{8}=$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$ $\frac{9}{10}-\frac{4}{10}=$ $\quad$ $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}=$	Elev 2, 3 og 4 svarte: $\frac{2}{8}+\frac{4}{8}=\frac{6}{8}\ og\ \frac{9}{10}-\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$ «Når det er lik nevner trenger vi bare å plusse eller ta minus i telleren. Nevneren blir det samme» $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ \ og\ \ \frac{7}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ «Når telleren er ulik bare ganger jeg sånn at de blir like, og da må jeg gange i telleren også. Dette gjør jeg i hodet, også regner jeg ut» Elevene satte ikke opp mellomregningene, men bare svaret. Elev 1, 5 og 6 svarte: $\frac{2}{8}+\frac{4}{8}=\frac{6}{16}\ \ og\ \ \frac{9}{10}-\frac{4}{10}=\frac{5}{0}$ «Det er bare å plusse tellerne med hverandre først, og så plusse nevnerne». «Når det er minus gjør jeg bare det samme som med pluss, at jeg først tar teller minus teller, og så nevnerne» $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{6}\ \ og\ \ \frac{7}{8}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}$ Elevene regner på samme måte med ulik nevner, som med lik nevner. De finner ikke fellesnevner før de regner ut.

Multiplikasjon med brøk	
Oppgaven	Elevenes svar
Regn ut: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} =$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} =$	Elev 2, 3 og 4 svarte: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad og \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{6}$ «Når vi regner med brøk må vi alltid finne fellesnevner, og fellesnevnerne skal ikke regnes sammen. Derfor skal bare tellerne ganges sammen» Elev 1, 5 og 6 svarte: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25} \quad og \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{18}$ «Jeg bare ganger sammen tellerne først og får 4, og så ganger jeg nevnerne sammen og da får jeg 25. Altså er svaret $\frac{4}{25}$»
Brøk som en relativ størrelse	
Oppgaven	Elevenes svar
Lise og Lars drar til butikken for å kjøpe leker med sparepengene sine. Lise bruker $\frac{1}{2}$ av sparepengene sine, og Lars bruker $\frac{1}{4}$ av sparepengene sine. Er det mulig at Lars har brukt mer penger enn Lise?	Elev 2, 3, 4, 5 og 6 svarte: «Nei, det går ikke fordi $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{1}{4}$. Da kan ikke Lars ha brukt mest penger» Elev 1 svarte «Ja» på bakgrunn av at eleven tror $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$, Selv om svaret er *ja*, bygger eleven dette på feil forståelse, ved at eleven mener $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$ fordi 4 er større enn 2.