HØGSKOLEN
i INNLANDET

Fakultet for lærerutdanning og pedagogikk
Institutt for matematikk, naturfag og kroppsøving

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

45 studiepoeng

En casestudie av fire videregående elevers kunnskaper om lineære funksjoner i arbeid med Geogebra

«A case study of four high school students knowledge of linear functions when using Geogebra»

Rune Hanserud

Veileder: Bjarte Rom

Master i realfagenes didaktikk

15.mai, 2018

Samtykker til tilgjengeliggjøring i digitalt arkiv Brage JA ☒ NEI ☐

Forord

Denne masteroppgaven markerer en avslutning på to fine studieår ved Høgskolen i Innlandet. Masterprogrammet har vært krevende, men gitt et stort læringsutbytte. Dermed er det på sin plass å takke de involverte foreleserne som har bidratt til dette.

Det er mange andre som også burde takkes, og en spesiell takk til Bjarte Rom som har vært veileder for dette prosjektet. Han har vært svært imøtekommende, gitt meg oppklarende, grundige og støttende tilbakemeldinger og råd.

Takk til familien, og spesielt kona mi Hege Kristin, som alltid har vært tålmodig, forståelsesfull og støttende under de intensive arbeidsperiodene. Det at du alltid har vist meg at du «har hatt trua» har betydd mye for meg gjennom skriveprosessen. Takk for at du har holdt ut med meg i denne perioden. Takk til Elias og Isak som har holdt ut med en asosial pappa – heretter skal jeg ikke gjøre så mye «lekser».

En takk til studiekamerat Petter som har vært en god og viktig diskusjonspartner, både gjennom denne oppgaven og i de «innledende rundene» i studiet. Tilsvarende takk rettes til flere kollegaer, og en spesiell takk til Kjetil Lybekk for mange gode betraktninger gjennom oppgaveskrivingen.

I tillegg ville arbeidet med masteroppgaven vært umulig å gjennomføre uten hjelp fra informantene «Max», «Isak», «Anna» og «Julie». Tusen takk til alle fire. I tillegg takk til de som bidro i piloteringen. Uten deres hjelp hadde jeg ikke sett hva som måtte finpusses i oppgavesettet.

Til sist en takk til alle som har bidratt med korrekturlesning.

Eina, 15.mai, 2018

Rune Hanserud

Innholdsfortegnelse

Norsk sammendrag

Denne masteroppgaven er en kvalitativ studie (casestudie innenfor et fenomenologisk perspektiv) som har studert fire videregående elever i arbeid med lineære funksjoner. Studiet har sett på hvilke kunnskaper elevene har opparbeidet seg om lineære funksjoner, der undervisningen har hatt et betydelig innslag av Geogebra.

Bakgrunnen for studien er blant annet personlige erfaringer som at elever ønsker å få en brukermanual til Geogebra. Denne kan i detalj fortelle dem hva de skal gjøre for å løse ulike oppgaver. Dette har vist seg å gi gode utslag for de svake elevene, og de har klart å få ståkarakter i faget, uten egentlig å ha skjønt veldig mye. Matematikk-kurset som informantene i dette studie følger, legger opp til at store deler av pensum kan løses med Geogebra. Sett opp mot forventninger og krav som læreplanen stiller om digitale ferdigheter og det som er omtalt over, ble det interessant å studere elevenes kunnskaper i arbeid med lineære funksjoner.

Rammeverket for oppgaven bygger i all hovedsak på Hiebert & Lefevre (1986) begrepspar *prosedyrekunnskap* og *begrepskunnskap*, samt koblingen mellom disse. Informantene i studiet ble satt til å løse et sett med oppgaver, deretter intervjuet med utgangspunkt i de individuelle løsningene av oppgavesettet.

Intervjuene ble transkribert og deretter analysert ut fra det gitte rammeverket. Analyseverktøyet er utarbeidet etter definisjonene til Hiebert & Lefevre (1986), med innslag fra andre sentrale personer som Brownell (1956), Holt (1964), Kilpatrick, Swafford & Findell (2001), Krutetskii (1976) og Rachlin (1981).

Analysen, tolkningen og flere funn støtter mye av den koblingen Hiebert & Lefevre (1986) gjorde mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Sammenhengen mellom disse er mer sammensatt enn å tenke på de som to statiske kunnskapstyper. Hovedfunnet dreier seg om koblingen mellom disse kunnskapstypene, og hvordan elevene viser at de har skjønt sammenhengen mellom ulike representasjoner. Representasjonene som blir brukt er etter Janvier (1978), og hvordan disse benyttes for å løse oppgaver om lineære funksjoner.

Engelsk sammendrag (abstract)

This master's thesis is a qualitative study (case study applying a phenomenological perspective) which has observed four students in their work with linear functions where the education has had a significant element of use of Geogebra.

The background for the study is, among other things, personal experiences such as students wishes to have a user's manual for Geogebra. This can explain them what to do in detail to solve different tasks, which in turn has proven to give positive effects for the weaker students where they have been able to receive a pass grade without really having understood much. The course in mathematics that the informants in this study follow is set so that large parts of the curriculum can be solved by using Geogebra. Considering the expectations and criteria in the curriculum concerning digital skills, and what is explained above, it was interesting to observe the students' knowledge when working with linear functions.

The framework for this task is mainly based on the works by Hiebert & Lefevre (1986) about the two kinds of knowledge labelled procedural knowledge and conceptual knowledge, and the relationship between these. The informants in the study were presented with a set of tasks to solve and were subsequently interviewed using the individual solutions of the task set as the starting point.

The interviews were transcribed and then analysed using the framework given. The analytical tool is designed using the definitions of Hiebert & Lefevre (1986), with contributions from other central persons such as Brownell (1956), Holt (1964), Kilpatrick, Swafford & Findell (2001), Krutetskii (1976) and Rachlin (1981).

The analysis, interpretation and several findings support much of the connection Hiebert & Lefevre (1986) made between procedural knowledge and conceptual knowledge. The link between the two concepts is more complex than to view them as static types of knowledge. The main finding revolves around the connection between these two types of knowledge, and how the students show that they have understood the link between various representations. The representations used are based on the work of Janvier (1978), and how these are used to solve tasks concerning linear functions.

1. Innledning

Vi lever i en verden som til stadighet blir mer og mer digitalisert, og det forventes at elevene har en god digital kompetanse, som også strekker seg inn i matematikkfaget. Mye av den teknologien vi har hjemme, på skolen og rundt oss ellers baserer seg på matematisk kunnskap opparbeidet gjennom tidene. Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) beskriver at det dagens unge lærer i matematikk ikke er det samme som foreldrene og besteforeldrene lærte, og at skolen må prøve å forutse hvilken matematisk kompetanse disse elevene vil trenge når de blir voksne (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 1). Dette er selvsagt en vanskelig og krevende jobb, men en start kan være å forberede elever på å bruke digitale hjelpemidler, slik som for eksempel Geogebra.

Mye av det som tidligere krevde svært gode regnetekniske ferdigheter har blitt erstattet av digitale verktøy, slik sett har det blitt mindre synlig og fremtredende i skolehverdagen, men samtidig ikke usynlig for de som fordyper seg i matematikk på videregående (1T, R1 og R2). Digitale verktøy i undervisningen ble tidligere rettet mot generelle IKT-kunnskaper, og ikke brukt slik som dagens læreplaner forventer at det brukes. Gjennom innføringen av kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2006), ble det politisk vedtatt at digitale verktøy skulle få plass i det norske klasserommet gjennom undervisning og læring. Digitale ferdigheter sees på som en viktig del av opplæringen, på lik linje som lesing, skriving, regning og muntlige ferdigheter. I læreplanen for matematikk fellesfag, står det blant annet under grunnleggende ferdigheter at elevene skal inneha digitale ferdigheter i matematikk, der de skal bruke digitale verktøy til læring, gjennom spill, utforskning, visualisering og presentasjoner. Videre skal de kunne bruke digitale verktøy til beregninger, simuleringer, problemløsning og modellering, slik at de etter hvert blir oppmerksomme på nytteverdien disse verktøyene har for læring i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). Dette gjennomsyrer kompetansemålene i læreplanen for matematikk helt fra barneskolen og opp til videregående nivå.

Matematikksenteret skriver også på sine nettsider at gjennom å bruke digitale verktøy på hensiktsmessige måter, og i ulike sammenhenger, vil dette gi elevene en vei å gå i en verden som blir mer og mer digital. Videre påpeker de fordelene for lærere ved at det blir enklere å tilpasse undervisningen, og elevene blir mindre opptatt av å gjøre beregninger. Samtidig får de mer tid til å undersøke mønstre, se etter sammenhenger, resonnere, utforske og diskutere (Matematikksenteret, 2017).

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Den økte digitaliseringen i skolen i alle fag har vært og er enorm. Det forventes til eksamen at elevene har gode kunnskaper i digitale verktøy. Til daglig underviser jeg elever i matematikk som går VG3 *Påbygging til generell studiekompetanse* (kurset 2P-Y), der store deler av pensum (ca. 40%) kan løses ved å bruke Geogebra.

Hovedintensjonen med oppgaven, er å få innblikk i kunnskapene elevene har opparbeidet seg i lineære funksjoner gjennom å kunne støtte seg på Geogebra. Det presiseres at de som ble studert har hatt undervisning i temaet, og Geogebra har aktivt blitt brukt. Tidligere personlige erfaringer, som trolig mange lærere kjenner seg igjen i, er at elever er opptatt av å få en type brukermanual. De vil ha et hefte med instruksjoner som forteller dem hva de skal gjøre når de støter på ulike problemer. Det dreier seg i stor grad om kommandoer de skal gi og skrive inn i Geogebra. For elevenes del, og spesielt de elevene som kan omtales som svake, vil dette helt klart være en fordel på mange måter. De kan opparbeide seg prosedyrer og memorere instruksjoner, som gjør det mulig for dem å løse oppgaver de kanskje ikke ville klart uten Geogebra. Videre kan dette bidra til at de består den skriftlige matematikkeksamen i kurset. Dette kan bety at mange elever ikke har selve forståelsen i fokus, men imidlertid ser muligheten til å stå på eksamen ved prosedyrepugging. Med bakgrunn i blant annet dette, reiser det seg noen relevante spørsmål: Er det slik vi ønsker at elevene skal komme seg gjennom matematikkfaget? Er det denne typen prosedyrekunnskap vi skal være ute etter i faget? Skal digitale programmer og verktøy erstatte mye manuelt arbeid og stille den relasjonelle forståelsen av faget i skyggen? Noen av disse spørsmålene vil indirekte bli belyst gjennom oppgaven.

I rapporten fra PISA2015 hevdes det at de norske elevene presterer bedre enn i PISA2012. Analyser, utført av OECD, viser at de norske, og andre nordiske elever forøvrig, har en fremgang som kan skyldes økt bruk av digitale hjelpemidler i matematikkundervisningen (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 114). Dette er en faktor som gjør oppgaven relevant, i tillegg er den praksisnær – både for meg selv og sannsynligvis andre lærere som underviser på samme nivå.

1.2 Nøkkelbegreper

Kunnskap er et viktig begrep som vil bli brukt mye i denne avhandlingen. Begrepet kunnskap viser i denne oppgaven til Hiebert & Lefevre (1986) sin terminologi om prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, såfremt ikke noe annet blir påpekt. De definerer prosedyrekunnskap som kunnskap uten forbindelser, rettere sagt som isolerte kunnskapsenheter uten kobling til annen kunnskap. Dette medfører at kunnskapen er svært kontekstavhengig, og muligheten for å overføre kunnskapen til andre situasjoner er begrenset. Kunnskapen retter seg kun mot prosedyrer som gir elevene tilgang til spesifikke løsningsstrategier. Begrepskunnskap er ifølge definisjonen til Hiebert & Lefevre (1986) kunnskap som er rik på relasjoner. Koblingen mellom kunnskapsenhetene er opprettet, og gjør det mulig for elever å bruke kunnskapen utenfor en gitt kontekst eller situasjon. Det vil bli gitt en grundigere gjennomgang av definisjonene i teorikapittelet.

At elevene kan *støtte seg på* Geogebra betyr i praksis at de kan bruke programmet under hele oppgaveløsningen, når de måtte ønske det. Hvordan kunnskapene fremstår innenfor temaet vil komme frem under intervjuet og presenteres i resultatkapittelet.

Med *representasjonsformer* for funksjoner, menes de Janvier (1978) beskrev i sin doktorgradsavhandling. Han skilte mellom situasjon, formel, graf og tabell (Janvier, 1978, s. 3.2). I kapittel 2.6 vil det komme en beskrivelse av disse.

1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål

Målsettingen med oppgaven er å finne ut om elevene etter endt undervisning av lineære funksjoner, viser det man kan kalle prosedyrekunnskaper og/eller begrepskunnskaper, spesielt med tanke på at de har benyttet Geogebra i innlæringen av temaet.

For meg var det viktig å se på kunnskapen de satt igjen med etter undervisningen var ferdig. Dermed ble problemstillingen på denne masteroppgaven følgende:

Hvordan viser elever kunnskaper om lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?

For å prøve å svare på problemstillingen har jeg stilt følgende forskningsspørsmål.

Forskningsspørsmål 1:
Hvilke kunnskaper viser elever når de arbeider med sammenhengene mellom de ulike representasjonene for lineære funksjoner, og kan støtte seg på Geogebra?

Forskningsspørsmål 2:
Hvilke muligheter får elevene til å se sammenhenger mellom de ulike representasjonene for lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?

For å svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene har jeg utviklet et oppgavesett til informantene, intervjuet dem en og en i etterkant og deretter analysert svarene de ga.

1.4 Avklaringer rundt rollen til Geogebra i oppgaven

Det er naturlig med en avklaring av betydningen Geogebra vil ha videre i denne oppgaven. Helt i begynnelsen av prosjektet hadde jeg en intensjon om å se på hvorvidt Geogebra bidro til økt forståelse og begrepskunnskap om lineære funksjoner. Det ble relativt raskt avklart at det ville bli for omfattende, siden det sannsynligvis er mange flere, og til dels sammensatte faktorer som kan bidra til at elever opparbeider seg begrepskunnskap og økt forståelse i temaet. Dermed ville det bli vanskelig å peke på hvorfor akkurat Geogebra var grunnen til det.

Med utgangspunkt i dette ble rollen til Geogebra tonet noe ned, og jeg ville fokusere på den kunnskapen de hadde opparbeidet seg gjennom undervisningen.

Siden Geogebra er blitt et av de viktigste digitale hjelpemidlene i matematikk, hadde jeg ikke helt lyst til å slippe taket i programmet. Dermed måtte jeg finne en innfallsvinkel som var forenlig med det jeg ønsket å finne ut. I praksis betyr dette at jeg ikke vil avgjøre, eller i stor grad si noe om effekten Geogebra har på utviklingen av kunnskapene, utover det informantene selv beskriver.

I fortsettelsen av oppgaven må Geogebra sees på som et hjelpemiddel for å løse oppgavene, og som et utgangspunkt for diskusjon og refleksjon rundt hver enkelt deltagers oppfatninger, kunnskaper og forståelse, knyttet til bruken av programmet. Med dette menes om de kjenner til den matematiske sammenhengen som ligger bak, og hvorvidt de kan forklare den tydelig, eller om de i stor grad bruker innlærte kommandoer (prosedyrer) i Geogebra for å løse oppgavene. Med bakgrunn i denne avklaringen vil flere av funnene som er gjort i undersøkelsen ikke direkte kunne relateres til Geogebra.

1.5 Oppgavens videre oppbygning

I neste kapittel presenteres teorien og det rammeverket som oppgaven bygger på for å belyse problemstillingen best mulig. Det tredje kapittelet utgjør en stor del av oppgaven og beskriver de metodiske tilnærmingene som er gjort. Tilnærmingen begrunnes ut fra oppgavens egenart. I kapittel 4 presenteres resultatene, analysen og funnene. Kapittel 5 tar for seg en diskusjon av forskningsspørsmålene med utgangspunkt i funnene fra resultatene og analysen. Kapittel 6 er et avslutningskapittel der problemstillingen blir besvart. Implikasjoner for undervisning og veien videre vil være andre områder som belyses i dette kapittelet.

2. Teori

I dette kapittelet vil det teoretiske rammeverket for oppgaven presenteres. Siden oppgavens hovedanliggende dreier seg om kunnskap og forståelse, vil det først presenteres noen tolkninger og teorier av disse begrepene. De fleste har en formening om hva det vil si å forstå, eller hva det vil si å ha kunnskap om noe, men dette er ofte hverdagsoppfatninger av begrepene. I en sammenheng som denne masteroppgaven vil kunnskaps- og forståelsesbegrepet bli brukt i en langt mer utvidet og sammensatt måte enn i dagligtalen. Skemp (1976) skriver blant annet at begrepet forståelse er et såkalt *faux amis*. I dette ligger det at beskrivelsen av ord kan være like, men allikevel har forskjellige betydninger. Hvis en person ikke er klar over betydningen av ordet, kan dette lett skape misforståelser og uhensiktsmessige feil (Skemp, 1976, s. 1). Det vil nå komme en teoridel som skal beskrive, synliggjøre og nyansere hva begrepene kunnskap og forståelse representerer videre i denne oppgaven. Kunnskap og forståelse er to sider av samme sak, og en metafor for forståelse jeg har hentet fra Solvang (1992) er: «Forståelse er aktivert kunnskap» (Solvang, 1992, s. 77). Long (2005) skriver også at disse begrepene er ekvivalente innenfor rammen av Skemps (1976) og Hiebert & Lefevres (1986) terminologi (Long, 2005, s. 59). Terminologien blir grundig gjennomgått i dette kapittelet. Antagelsene over legger den videre føringen for oppgaven, og som en oppklaring betyr dette at kunnskapsbegrepet og forståelsesbegrepet vil bli brukt noe om hverandre videre i denne oppgaven. Et annet hovedpoeng er at det ofte er vanskelig å skille disse begrepene fra hverandre i forskning og litteratur. Man leser om «knowledge» og «understanding», og ofte flyter disse begrepene over i hverandre, spesielt når man ser på den overførte betydningen av teksten.

2.1 Relasjonell og instrumentell forståelse

Richard R. Skemp (1976) skiller mellom to typer av forståelse i matematikk. Han skiller mellom *instrumentell forståelse* (instrumental understanding) og *relasjonell forståelse* (relational understanding). Dette er begreper han har lånt og videreutviklet fra Stieg Mellin-Olsen (Skemp, 1976, s. 2). I følge Skemp har en elev instrumentell forståelse, dersom eleven er i stand til å gjennomføre en handling eller en prosedyre. Det betyr at eleven vet *hva* han skal gjøre for å få riktig svar, men er ikke i stand til å kunne forklare *hvorfor* det han gjør er riktig. Dette kan sees i sammenheng med undervisning som har som formål å lære elevene regler, eller rettere sagt lære de noen bestemte, fastlåste strategier og fremgangsmåter. En slik tilnærming av forståelse er ofte bundet til visse oppgavetyper, og det blir vanskelig for elevene å løse tilsvarende oppgaver, men i forskjellig kontekst. Slik sett kan instrumentell forståelse i matematikk sies å være «regler uten forklaringer» (Skemp, 1976, s. 2).

Solvang (1992) definerer instrumentell forståelse som: «Vi sier at en elev viser instrumentell forståelse dersom hun på en utfordring bare svarer med en konkretisering» (Solvang, 1992, s. 96).

For å eksemplifisere dette nærmere, vil en elev som på oppfordring blir bedt om å forklare et begrep eller fenomen (eksempelvis stigningstallet til en lineær funksjon) bare henvise til flere eksempler av fenomenet. Elevene vet hvor stigningstallet er plassert, men det er ikke sikkert eleven vet den praktiske tolkningen av det. I tillegg kan elevene også tro at det første leddet i funksjonsuttrykket <u>alltid</u> er stigningstallet ($y = ax + b$). Dersom en oppgave har byttet rekkefølge på leddene ($y = b + ax$) vil de fortsatt kunne oppfatte det første leddet som stigningstallet. Elever som har utviklet en instrumentell forståelse vil mest sannsynlig ha det som kan betegnes som *figurativ kunnskap* (Jerlang, Egeberg & Sommer, 2000, s. 268; Solvang, 1992, s. 89). Dette er kunnskap som er tilegnet gjennom pugging, eller ved å imitere andre, eksempelvis læreren. Disse elevene vil sannsynligvis klare å gjennomføre en standardoppgave og få rett svar, men det vil være vanskelig å gi en forklaring på hvordan man løste oppgaven. Elevene er i stand til å memorere og bruke algoritmer, men de kan ikke utlede algoritmen eller forklare hvorfor det er et riktig verktøy å bruke. En elev med en instrumentell forståelse vil antageligvis ikke innse at han ikke forstår sammenhengen. Eleven vil sannsynligvis argumentere med at «Se her, jeg får jo riktig svar». Elever som streber mot en instrumentell forståelse er altså opptatt av å lære seg en regel for å komme frem til svaret. Så fort dette er oppnådd ignorerer de resten av resonnementet og forklaringen (Skemp, 1976, s. 2,4).

Slik Skemp (1976) definerer den relasjonelle forståelsen, har elevene oppnådd dette dersom de vet *hva* de gjør, og *hvorfor* de gjør det. De er i stand til å relatere en metode til et problem, og samtidig overføre metoden til nye problemer og kontekster (Skemp, 1976, s. 9).

Solvang (1992) definerer relasjonell forståelse slik: «Vi sier at en elev viser relasjonsforståelse dersom hun når hun løser en passende utfordring, kan forklare sammenhengene mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen» (Solvang, 1992, s. 97).

Hvis en elev har relasjonell forståelse, kjenner han til relasjonene mellom matematisk kunnskap og de strukturer som kunnskapen tilhører. Det vil si at eleven forstår de sammenhengene som forklaringen bygger på, og har det som kan betegnes som *operasjonelle kunnskaper*. Vi kan tenke på dette som tankemessige handlinger. For at kunnskapen skal være operasjonell må den (1) være reversibel, (2) kunne settes sammen med annen kunnskap, (3) være en del av den overordnede forståelse (helhet) og (4) kunne internaliseres (at en kan tenke på en handling, uten nødvendigvis å utføre den) (Jerlang et al., 2000, s. 268; Solvang, 1992, s. 91,93).

Ut fra Skemp (1976), finnes noen indikatorer som er typiske for instrumentell og relasjonell matematikk. Instrumentell matematikk er vanligvis enklere å forstå, man innkasserer belønningen raskere i form av flere sider riktig utførte oppgaver – noe som i seg selv gir en god mestringsfølelse og selvtillit. Det er mindre matematiske kunnskaper involvert i instrumentell matematikk, slik at svarene kommer raskere enn ved relasjonell matematikk. Det skal sies at de som tenker relasjonelt, også kan bruke instrumentell matematikk for å løse oppgaver (Skemp, 1976, s. 8). Det finnes også noen fordeler ved relasjonell matematikk. Relasjonell matematikk er mer overførbar til andre oppgaver og kontekster. Eleven vet ikke bare hvilken metode som fungerer, men også hvorfor den fungerer. Relasjonell matematikk er enklere å huske når den først er lært, selv om den er vanskeligere og mer utfordrende å lære. Dette har igjen noen fordeler: (1) elevene ser forbindelser og har overordnet oversikt, (2) innebærer mindre re-innlæring av kunnskaper – det som allerede er lært relasjonelt er mer varig. Relasjonell forståelse kan være et mål i seg selv. Den kan gjøre at eleven ønsker å lære mer og bygge videre på den kunnskapen og forståelsen som allerede er på plass og tilegnet. Elevene vil altså kunne bli mer motivert for å søke nye utfordringer, samt sette dette inn i en bredere kontekst (Skemp, 1976, s. 8-10).

2.1.1 Betraktninger rundt Skemps (1976) teori om forståelse

Skemp (1976) hevdet at man enten måtte ha en instrumentell matematikk eller en relasjonell matematikk. Dermed kan en tolkning innebære at dersom elevene har relasjonell forståelse, blir den instrumentelle forståelsen overflødig. Etter hvert som dette prosjektet har tatt form, kom det frem et behov for en mindre statisk inndeling. Behovet for et teorigrunnlag som hadde glidende overganger ble sentralt, eller rettere sagt en teori som på mange måter bekrefter samspillet, eller en kobling mellom disse to forståelsestypene. Det ble tidlig klart at å bruke Skemps teorier helt isolert ble for snaut for ei slik oppgave som denne. Med bakgrunn i dette, leste jeg Hiebert og Lefevres (1986) teorier om prosedyrekunnskap og begrepskunnskap.

Skemp er å regne som en pioner på fagfeltet, og det ble naturlig at han ble omtalt i dette rammeverket. Behovet for å gjøre teorigrunnlaget mer dynamisk, førte til at prosedyre- og begrepskunnskap har fått hovedfokus i denne oppgaven. Disse begrepene støtter mye av det Skemp la frem 10 år tidligere, men i tillegg nyanserer det bildet betraktelig.

2.2 Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap

Hiebert & Lefevre (1986) brukte en annen terminologi enn hva Skemp (1976) gjorde for å beskrive forståelse og kunnskap i matematikk. De kategoriserte kunnskapen i to hovedkategorier, som jeg har oversatt til *begrepskunnskap* (conceptual knowledge) og *prosedyrekunnskap* (procedural knowledge). Selve opphavet til disse to begrepene er nærmest umulig å identifisere presist, men begrepene ble gjort kjent gjennom Hiebert (1986).

Oversettelsen fra conceptual knowledge til begrepskunnskap har jeg gjort med bakgrunn i følgende vurderinger. Concept kan oversettes som begrep, og conceptual som konseptuell. Slår man opp betydningen av konseptuell, får man blant annet opp synonymet begrepsmessig – altså begrepsmessig kunnskap. Dette kan tolkes som kunnskap som er forankret i fornuften, fordi man er fortrolig med forskjellig begreper. Disse kjente begrepene gjør at man er i stand til å finne frem til sammenhenger mellom dem, også i ulike kontekster. Begrepskunnskap vil videre i denne oppgaven være kunnskaper om begreper og de tilhørende kontekster rundt begrepet, som ofte kan kalles *konsepter*. Begrepet konsept kan ifølge Star (2005) antyde forbindelser mellom kunnskap (J. R. Star, 2005, s. 407).

2.2.1 Begrepskunnskap

Hiebert & Lefevre (1986) brukte begrepskunnskap for å beskrive kunnskap som er «rik på relasjoner». Det vil si at elevene er i stand til å knytte og forbinde kunnskap sammen, at de har et nettverk av kunnskap som er linket sammen og som danner grunnlaget for selve forståelsen. Elevene ser sammenhenger og kombinasjoner mellom ulike typer av kunnskap, og hvordan dette kan være til hjelp for å løse bestemte oppgaver. Hiebert og Lefevre (1986) poengterer at dersom det er snakk om begrepskunnskap, kan ikke en kunnskapsbit være isolert fra nettverket, men den må stå i relasjon til annen kunnskap. Utviklingen av denne typen kunnskap kan skje på to måter: (1) elevene konstruerer og lager seg forbindelser mellom de ulike informasjonsbitene, (2) elevene oppretter og forbinder disse informasjonsbitene sammen ved hjelp av kunnskap som allerede hver for seg er lagret, og det som nylig er lært (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Hiebert og Lefevre (1986) tegner et skille i begrepskunnskapen, mellom det de kaller for *primært nivå* (primary level) og *reflekterende nivå* (reflective level) (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4-5).

Det primære nivået refererer til kunnskaper som ligger på samme abstraksjonsnivå, det vil si et abstraksjonsnivå som ikke er høyere enn det nivået selve kunnskapen representerer. Med abstraksjon menes i dette tilfellet hvorvidt kunnskapen er bundet til spesifikke kontekster. Desto mer frigjort kunnskapen er fra kontekstene, desto mer øker abstraksjonen. Hiebert og Lefevre (1986) eksemplifiserer dette ved å vise til et tilfelle der elever lærer om desimaltall. Her er plassverdisystemet sentralt, og elevene vil trolig kjenne plasseringen av tideler, hundredeler, tusendeler osv. Når de videre skal addere desimaltall, vil sannsynligvis flere av elevene skjønne at de bør sette de opp under hverandre, og addere tideler med tideler, hundredeler med hundredeler. De har brukt sine kunnskaper om plassverdisystemet for å utføre addisjonen, og de har brukt to kunnskapsbiter (addisjon og desimaltall) og koblet disse sammen på et primært nivå. Dette karakteriseres som primært nivå fordi det er bundet opp mot konteksten om desimaltall og ikke noe mer (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4-5).

Det reflekterende nivået refererer til et høyere abstraksjonsnivå. Forbindelser på dette nivået er i mye mindre grad bundet opp mot spesifikke kontekster. Abstraksjonen skjer mellom deler av kunnskap som i utgangspunktet oppfattes som separate, og forbindelsene er ofte konstruert slik at man tar utgangspunkt i lignende egenskaper av tidligere tilegnet kunnskap. Long (2005) beskriver det reflekterende nivået som når elevene først har jobbet med noen tallsystemer (eksempelvis femtallsystemet og totallsystemet) over en periode, vil de raskt forstå at prinsippene er stort sett de samme i arbeidet med de fleste andre tallsystemene

(Long, 2005, s. 61). Hiebert og Lefevre (1986) spinner videre på addisjon og eksemplet fra det primære nivået. De skriver at for å komme på et reflekterende nivå må man ofte ta et skritt bakover mentalt og reflektere over de allerede etablerte relasjonene. Når man har denne typen av kunnskap vil elevene ha mulighet til å få større oversikt over det matematiske terrenget (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 5).

2.2.2 Prosedyrekunnskap

Prosedyrekunnskap, slik Hiebert og Lefevre (1986) definerte det, kan sies å være kunnskap som ikke er «rik på relasjoner». Med andre ord er dette isolerte kunnskapsbiter som ikke står i forbindelse til annen kunnskap, og dermed svært kontekstavhengig. Det handler i stor grad om spesifikke prosedyrer elevene har tilegnet seg for å løse bestemte problemer. Prosedyrekunnskaper kan deles opp i to ulike deler. Den første delen handler om det matematiske språket, blant annet som et symbolsk representasjonssystem. Den andre delen består av algoritmer, regler og prosedyrer for å fullføre og løse en matematisk oppgave (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6).

Elever med den første prosedyrekunnskapen vet hvilke elementer som skal være med i en operasjon for at den skal løses, og kan gjenkjenne hvorvidt den symbolske notasjonen tilfredsstiller det matematiske språket. Eksempelvis vil en elev kunne si at $1{,}75 : \_\_\_ = 7$ er syntaktisk/matematisk riktig satt opp, men likevel ikke være 100% sikker på hvordan oppgaven skal løses. Samme elev vil kunne si at $5x{+}{=}\ \_\_\_\ 3$ ikke er et akseptabelt oppsett. Et viktig poeng å merke seg, er at denne prosedyrekunnskapen for symboler ikke må sammenlignes med det å kunne gjøre avanserte matematiske beregninger, og samtidig forstå tankene og kunnskapen bak det. I betydningen Hiebert og Lefevre (1986) bruker, betyr forståelsen for det matematiske språket en type overflatekunnskap som er knyttet til det syntaktiske (hva som er lov/ikke lov å skrive), og ikke nødvendigvis mot meningen og innholdet i det symbolske (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6).

De andre prosedyrekunnskapene handler mer om kunnskap som baserer seg på regler, algoritmer og prosedyrer. Dette er rutiner eller prosedyrer som fokuserer på instruksjoner, nærmere bestemt steg-for-steg-instrukser. Prosedyrene utføres i et forutbestemt lineært mønster. Det ene fører til det andre, og dette vil lede frem til det endelige svaret. Elevene som har slik kunnskap, har lært seg prosedyrer eller oppskrifter på hvordan de skal utføre og løse bestemte typer oppgaver. Dette kan også inkludere strategier for hvordan man går frem og løser problembaserte oppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6-8).

Isolerte prosedyrekunnskaper vil være sterkt kontekstavhengige. Kunnskapen vil nærmest være umulig å overføre til andre oppgaver. Med begrepskunnskaper vil elevene kunne innta et fugleperspektiv, danne et overblikk, resonnere og navigere seg frem i kunnskaps- og informasjonsbitene og deres sammenvevde nettverk. Eleven vil også kunne overføre dette til ulike kontekster uavhengig av oppgavetypen.

2.2.3 Koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskap

Matematisk kunnskap kan ikke alltid beskrives som enten prosedyrekunnskap eller begrepskunnskap. Noe kunnskap kan være litt av begge, mens annen kunnskap ikke passer inn i det hele tatt (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3).

Tidligere har det vært debatter og diskusjoner om hvilken kunnskap som var viktigst, eller hvordan koblingen mellom dem skulle være. Opp gjennom tidene har teoretikere brukt annen terminologi som refererer til prosedyre- og begrepskunnskap. Piaget (1978) brukte *conceptual understanding* og *successfull action*, Tulving (1983) brukte *semantic memory* og *episodic memory*. Anderson (1983) skilte mellom *declarative* og *procedural knowledge* (referert i Hiebert & Lefevre, 1986, s.1). Dette indikerer at begge kunnskapstypene har fått forskjellige merkelapper hos ulike teoretikere. De ulike merkelappene har imidlertid dreid seg om ferdigheter og forståelse. Diskusjonen har vært hvordan disse skulle vektlegges i undervisningen. Brownell (1956) argumenterte for økt fokus på forståelse, og dette fokuset ville forsterke det han kalte beregningsferdighetene (computational skills). Resultatet måtte bli en nedtoning i innlæringen av isolerte ferdigheter og dermed en høyere grad av forståelse. Brownell (1956) peker også på at tidligere var fokuset på å memorere prosedyrer i stedet for å vektlegge forståelsen. Et annet viktig begrep som Brownell innførte var «meaningful habituation», eller det man kan oversette til meningsfull læring. I dette ligger blant annet at læreren må stimulere elevene til å forklare *hvordan* og *hvorfor* ulike sammenhenger er som de er, både gjennom beregninger og aktiviteter (Brownell, 1956, s. 131-133).

Hiebert & Lefevre (1986) hevdet at begrepskunnskap ikke kan bli oppnådd uten meningsfull læring:

> Conceptual knowledge, by our definitions, must be learned meaningfully. Procedures, on the other hand, may or may not be learned with meaning. We propose that procedures that are learned with meaning are procedures that are linked to conceptual knowledge. (s. 8)

Mening er ifølge Hiebert & Lefevre (1986) etablert som forbindelser mellom ulike kunnskapsenheter, og kan blant annet sees i lys av det Barnard & Tall (1997) omtaler som kognitive enheter (Barnard & Tall, 1997, s. 1). Prosedyrer kan dermed på sin side læres meningsfullt og slik sett knyttes opp til begrepskunnskapene, eller til det Hiebert & Lefevre (1986) omtaler som rote learning.

Rote learning kan oversettes som en type memoreringsteknikk som baserer seg på repetisjon. Dermed vil rote learning generere prosedyrekunnskap som har liten grad av forbindelser mellom enhetene og annen kunnskap. Prosedyren man tilegner seg er svært bundet til konteksten den er lært i. Dette gir lav overførbarhet til andre situasjoner, og kunnskapen er lagret som isolerte biter av informasjon. Begrepskunnskap, slik det er definert tidligere i oppgaven, kan derfor ikke tilegnes direkte gjennom rote learning. Dette betyr ikke at elevene på et senere tidspunkt ikke kan gjenkjenne og finne sammenhenger mellom de isolerte kunnskapsbitene. Det som da ligger til grunn for de nyervervede begrepskunnskapene stammer fra gammel rote learning og ikke direkte gjennom rote learning. Et klassisk eksempel på dette er telleferdigheter som barn lærer i barnehagen, nærmest som språkleker (telleregle), og som senere utvikler seg til begrepskunnskap og forståelse rundt tallsystemet (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8,19).

God matematisk kompetanse inkluderer blant annet å se forbindelser mellom prosedyrer og begreper. Dette er noe trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001) viser tydelig. Modellen beskriver matematisk kompetanse som ett tau som består av fem tråder. Disse fem trådene er sammenvevd og står i nær forbindelse med hverandre. Trådene har Kilpatrick et al. (2001) definert som *conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning* og *productive disposition* (Kilpatrick et al., 2001, s. 5). Spesielt de to første trådene vil bli belyst senere i dette kapittelet.

Hiebert & Lefevre (1986) hevder det er mulig å ha prosedyrekunnskap uten å koble det til begrepskunnskap, men det er vanskelig å se for seg begrepskunnskap som ikke er sammenkoblet med prosedyrekunnskap. Dette kan delvis forklares med at prosedyrer oversetter, eller visualiserer begrepskunnskapene i noe som kan observeres – noe konkret (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9).

Det finnes flere fordeler ved å se på koblingen mellom begreps- og prosedyrekunnskap som en dynamisk vekselvirkende prosess, og ikke som to statiske kunnskapstyper. Ved å linke disse sammen, oppstår det blant annet flere fordeler knyttet til prosedyrekunnskaper. Dette gjelder for begge typene av prosedyrekunnskap. Ved å koble begrepskunnskap opp mot det matematiske språket vil dette kunne bidra til å utvikle mening og forståelse for symboler. Eksempelvis kan dette dreie seg om å oversette fra situasjon til formel. Eleven kan få oppgitt at et lineært forhold synker jevnt. Da vil innføringen av et negativt stigningstall gi mening og forhåpentligvis en forståelse av hvorfor det er slik (jf. begrepet synke jevnt). Det forventes at man kan mange prosedyrer når man driver med matematikk, og det er nærmest umulig å huske alle, spesielt som isolerte kunnskapsbiter. Hvis prosedyrene er relatert til begrepskunnskap vil dette forsterke grunnlaget som prosedyrene bygger på, og slik sett virke fornuftige. Med denne tankegangen blir det forståelig hvordan og hvorfor prosedyrer fungerer, og det er enklere å huske noe som gir mening. Det blir lettere å gjenkalle prosedyrene. Dette er også i tråd med Skemps indikasjoner om relasjonell matematikk (Skemp, 1976, s. 8-10). Hvis man knytter prosedyrekunnskap opp mot begrepskunnskap vil prosedyrene bli en del av nettverket som forbinder kunnskapsenhetene. I forlengelsen av dette vil gjenkallelsen av prosedyren bli forsterket, fordi kunnskapsstrukturen (nettverket) består av en rekke forbindelser som gir tilgang til prosedyren. Dette øker sjansen for å mestre gjenkalling av prosedyren ved behov (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 10-12).

For å huske, forenkle og effektivt kunne bruke prosedyrer, er en sammenkobling av prosedyre- og begrepskunnskap helt nødvendig. Dette kan ifølge Hiebert & Lefevre (1986) skje på minst tre ulike måter.

1) En forsterkende oppfatning av hva problemet går ut på. Når man står ovenfor et problem vil man ofte foreta mentale betraktninger og deretter velge passende prosedyrer. Har man godt utviklede begrepskunnskaper, kan man være i stand til å forenkle problemet, og dermed løse problemet med tilgjengelige prosedyrer. Dette kan også dreie seg om å plassere problemet i en meningsfull eller

virkelighetsnær kontekst. Slik sett vil elevene som klarer dette ha mindre sjanse til å gjøre feil, fordi prosedyrene ikke er memorerte.

2) Elever med begrepskunnskap vil også kunne overvåke sine egne prosedyrer, evaluere og være kritiske til sine svar (om de gir mening). Det vil si å kritisk vurdere prosedyrevalgene, og å oppdage eventuelle uhensiktsmessige prosedyrer. På denne måten klarer elever å frigjøre prosedyren fra konteksten den ble lært i, og bruke den i andre like strukturelle problemer.

3) Dersom elevene har gode overføringsevner, vil dette redusere antall prosedyrer som kreves. Det vil si at prosedyrene er fleksible og ikke bundet til spesielle kontekster eller oppgaver. Prosedyrene er generaliserte, og det er ikke behov for å huske ulike prosedyrer for de forskjellige oppgavene – derav et mindre antall prosedyrer å huske (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 12-14).

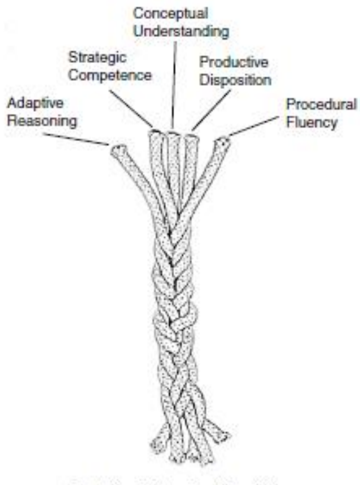
I tillegg til fordelene som oppstår for prosedyrekunnskapene ved å se på sammenkoblingen, er det også noen fordeler som kommer begrepskunnskapene til gode. Symboler i det matematiske språket som er bundet sammen på en meningsfull måte, kan brukes til å tenke på de konseptene de representerer. I dette ligger det at symboler kan forsterke begrepene. Eksempelvis kan symbolene $y = ax + b$ gi en entydig og forsterkende forklaring på hvordan man tenker seg at lineære funksjoner er bygd opp. Hvis elevene er fortrolige med hva de ulike leddene representerer, er denne symbolbruken med på å gi den matematiske uttrykksformen en mening. En annen fordel for begrepskunnskapene er at prosedyrene ofte bruker begreper for å løse problemer. Dette kan for eksempel dreie seg om problemer som ikke har en entydig løsningsstrategi, der man må bruke fakta og begreper for å finne løsningen. Dersom man løser flere slike lignende oppgaver, vil man kunne klare å memorere kunnskapen opp mot hendelser, og begrepskunnskapene blir omgjort til ulike sett med rutiner. Dette danner basisen for et prosedyresystem. Dermed kan kunnskap som i utgangspunktet var begrepskunnskap oversettes til prosedyrekunnskap. Man kan også se at prosedyrer forenkler og legger til rette for begrepskunnskaper, fordi prosedyrer som er godt innarbeidet kan redusere det kognitive arbeidet som kreves for å løse et problem. På denne måte kan elevene fokusere på å se sammenhenger (mønstre) og planlegge stegene i stedet for å grave seg ned i beregninger. Kort oppsummert kan automatiserte og effektive prosedyrer frigjøre kapasitet til å tilegne seg «dybde-begrepskunnskap» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 14-16).

Hiebert & Lefevre (1986) sier at det å være matematisk kompetent, betyr at man kjenner til begreper, symboler, prosedyrer og vet hvordan de er relatert til hverandre. Dette betyr at de to formene for kunnskap som er omtalt i dette kapittelet er velutviklet. Disse tankene samsvarer godt med det Kilpatrick et al. (2001) legger i trådmodellen sin (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Det viser seg at det finnes noen faktorer som hindrer utviklingen eller konstruksjonen av forbindelsene mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Den mest opplagte hemmende faktoren er kanskje kunnskapsmangel. Det blir vanskelig å utvikle forbindelser mellom kunnskap om kunnskapen ikke er der, eller om store deler av begrepene og prosedyrer ikke er på plass. Et annet hinder for utviklingen er om elevene har problemer med å skjønne eller se forbindelsene. Elever kan overse sammenhenger som for lærere og andre voksne er opplagte. I tillegg kan kunnskapen hos elevene være oppstykket og delt. Med dette menes at kunnskapen er kontekstbundet, og dette kan gjøre det vanskelig å oppdage fellestrekk eller sammenhenger mellom ny kunnskap og gammel kunnskap. Kontekstbundet kunnskap inviterer ikke til å søke etter sammenhenger utenfor den gitte konteksten som kunnskapen er lært i. Det er et sentralt poeng, at selv om kunnskapen er godt utviklet hver for seg, kan de fortsatt sees på som isolerte kunnskapsenheter. Når elever tilegner seg kunnskap i en kontekst, og holder dette adskilt fra kunnskap som er tilegnet i en annen kontekst, vil de ikke klare å koble disse sammen og kunnskapen forblir isolert (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 16-18).

Som en kort oppsummering kan en se på det Teachey (2003) fremhever om koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Det fører til bedre bevaring av kunnskap og overførbarheten av prosedyrer til andre kontekster blir enklere. I tillegg vil det gi en bedre utøvende kontroll av prosedyrer. Den utøvende kontrollen speiler elevenes muligheter til å overvåke både hensiktsmessigheten til å velge en prosedyre, men også det som omhandler rimeligheten og gyldigheten av løsningen (kritisk vurdering) (Teachey, 2003, s. 5).

2.3 Matematisk kompetanse

I de foregående delkapitlene er det redegjort og argumentert for at det er en forbindelse mellom prosedyre- og begrepskunnskap, og at disse ikke bør sees på som to adskilte kunnskapstyper. Kilpatrick et al. (2001) bruker begrepet matematisk kompetanse. De beskriver den matematiske kompetansen som et tau med fem tråder (figur 1) som står i forbindelse med hverandre. Trådene skal illustrere forskjellige aspekter av alt det komplekse som matematisk kompetanse innebærer. De fem trådene som tauet består av må ikke sees på som isolerte deler. I denne oppgaven vil det likevel bli fokusert på spesielt to av trådene. Det er de som omhandler *begrepsforståelse* (conceptual understanding) og *prosedyreflyt* (procedural fluency) (Kilpatrick et al., 2001, s. 5, 116). Dette er begreper som det kan knyttes likheter til og diskuteres sammen med Hiebert og Lefevres (1986) begrepskunnskaper og prosedyrekunnskaper.



Figur 1: *Trådmodellen til Kilpatrick et.al (2001) (s.5)*

Hva man gjennom tidene har lagt i begrepet matematisk kompetanse har endret seg, og læreplanreformene har selvsagt vært med å styre mye av dette. I første halvdel av 1900-tallet var det vanlig å assosiere matematiske ferdigheter med aritmetiske beregningsprosedyrer som ga raske og nøyaktige svar. På midten av 1900-tallet gikk man over til å se på matematiske ferdigheter som noe mer enn bare beregningskompetanse. Det ble fokus på forståelsen og strukturen i matematikk, før man igjen gikk tilbake til det tidlige 1900-tallets oppfatning. Det var ikke før på 1980- og 1990-tallet at ord som resonnering, problemløsning, kommunisering og se forbindelser av matematiske ideer og resultater så dagens lys (Kilpatrick et al., 2001, s. 115-116).

Begrepsforståelse slik det beskrives hos Kilpatrick et al. (2001) peker som nevnt mot Hieberts & Lefevres (1986) beskrivelser om begrepskunnskap. En elev med begrepsforståelse vet og kan mer enn bare isolerte metoder og fakta. De vet hvorfor en matematisk ide er viktig og i hvilke kontekster og situasjoner de kan brukes. Kunnskapen som eleven har er forbundet med hverandre i en helhet, og dette gjør de i stand til å lære nye ting ved å se det nye i lys av ideer de allerede kjenner til. Dette fører til at kunnskap bevares lettere, det blir enklere å huske og bruke kunnskapen og den kan lettere rekonstrueres hvis den glemmes. Elever med begrepsforståelse vil være kritiske til sine egne svar og resultater, og om nødvendig foreta riktige justeringer. Begrepsforståelse innebærer også at elevene ser forbindelser mellom begreper og prosedyrer. Dermed kan de være i stand til å gi argumenter som forklarer hvorfor det ene er en konsekvens av det andre (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

Begrepet prosedyreflyt refererer til kunnskap om prosedyrer, og kunnskap om når og hvor de kan brukes. Dersom eleven har god prosedyreflyt, utføres prosedyrene fleksibelt, nøyaktig og effektivt. I fleksibilitet ligger det å ha kompetansen til å veksle mellom forskjellige prosedyrer, men også vurdere hvorvidt en prosedyre gir det riktige svaret eller om den i det hele tatt er hensiktsmessig for å løse problemet (overvåkning). Prosedyrer og algoritmer er beregningsverktøy, som på sin side kan være viktige i seg selv, med tanke på matematiske begreper. Dette igjen viser nødvendigheten av vekselvirkningen mellom begrepsforståelse og prosedyreflyten (Kilpatrick, s.121-122).

Prosedyreflyten blir ofte sett på som en konkurrent til begrepsforståelsen i skolematematikk. Dette lager et uhensiktsmessig skille mellom dem. Som trådmodellen viser er disse to, sammen med tre andre faktorer, sammenvevd i et nettverk som man ikke må se på som adskilte deler. Hiebert & Lefevre (1986) argumenterte også for en dynamisk sammenheng mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Forståelsen gjør læringen av prosedyrer og andre ferdigheter lettere og risikoen for å glemme blir mindre. Motsatt kan man tenke at det å ha noen prosedyrer og ferdigheter innlært, vil være nødvendig for lære og utvikle matematiske begreper med forståelse (Kilpatrick et al., 2001, s. 122).

Uten tilstrekkelig prosedyrekunnskap, eller prosedyreflyt, vil elevene få problemer med å forklare og vise viktige matematiske sammenhenger. Dersom elevene utfører prosedyrer de ikke forstår, er det fare for at de velger feil prosedyre, og dette vanskeliggjør det å lære de riktige. Prosedyrene vil også være isolerte kunnskapsbiter. Dermed blir det vanskeligere å lære nye emner, siden det ikke finnes noe eksisterende nettverk å feste det til. I tillegg vil dette kreve omfattende repetisjoner, slik at sannsynligheten for å glemme stegene blir mindre. Med forståelse og begrepskunnskap på plass, vil elevene være i stand til å rekonstruere stegene slik at de ikke trenger å huske alle prosedyrene (Kilpatrick et al., 2001, s. 123).

2.4 Likheter og forskjeller mellom Hiebert & Lefevre (1986) og Kilpatrick et al. (2001)

Det er påfallende mange likheter mellom Kilpatrick et al. (2001) og Hiebert & Lefevre (1986). De fokuserer begge på den dynamiske tankegangen om at det ene påvirker det andre, slik at for å oppnå en samlet helhetlig forståelse, er prosedyrekunnskap og prosedyreflyt en absolutt nødvendighet utover det å ha begrepskunnskap. De ser på matematikk som mer enn bare å følge innpuggede strategier eller prosedyrer.

Kilpatrick et al. (2001) opererer med flere aspekter som ikke Hiebert & Lefevre (1986) eksplisitt nevner, men som kan spores indirekte i teorien. Begreper som engasjement, resonnere og anvende er noe Kilpatrick et al. (2001) tydeliggjør som matematiske kompetanser, noe som er viktig for å forstå helheten i matematikk. Hos Hiebert & Lefevre (1986) ligger disse mer implisitt, nærmere bestemt innbakt i begrepskunnskapene.

Ser man disse teoretiske perspektivene opp mot Skemp (1976), ville Skemp ment at den instrumentelle forståelsen ville vært overflødig, dersom man har den relasjonelle forståelsen i matematikk. Dette er den største forskjellen mellom de teoretiske perspektivene som er presentert her, og dermed noe av grunnen til at han ikke har fått mye plass i analyse og vurderingsarbeidet i denne oppgaven.

2.5 Vurdering og analyse av prosedyre- og begrepskunnskap

Hovedrammeverket i masteroppgaven bygger på teorier om kunnskap og forståelse i matematikk. Det er beskrevet teoretikere som har studert dette, slik som Skemp (1976) med instrumentell og relasjonell forståelse og Hiebert og Lefevre (1986) som brukte terminologien prosedyre- og begrepskunnskap.

Mange forskere har definert hva som ligger i begrepet begrepskunnskaper, og prøvd å skille det fra prosedyrekunnskaper. Som delkapittel 2.2.3 beskriver, er ikke dette alltid like hensiktsmessig.

Hvordan kan man vurdere hvorvidt elevene har begrepskunnskap eller prosedyrekunnskap? Da er det nødvendig med en inndeling i kategorier og kriterier. Hovedanliggende for begrepskunnskaper og forståelsen om funksjoner er stort sett knyttet til Janviers representasjonsformer (se 2.6).

Amerikaneren John Holt gjorde mange klasseromsobservasjoner, og spesielt forsøkte han å forstå hvorfor barn ikke lykkes på skolen. Gjennom sine observasjoner kom han frem til en rekke kriterier eller indikatorer som skilte det han kalte for *real learning* (conceptual knowledge) og *apparent learning* (procedural knowledge). Han sier blant annet at dersom en elev virkelig har lært noe, så kan eleven bruke det og det er direkte forbundet med elevens virkelighet (real learning). I motsatt fall vil ikke elevene ha noe å feste kunnskapen til, og dermed ikke være av stor verdi for eleven (apparent learning) (Holt, 1964, s. 102-103).

Videre beskriver Holt (1964) hva han legger i begrepskunnskap og forståelse, og at dette kan hjelpe oss å se hva elevene virkelig vet, i motsetning til hva det ser ut som om de vet:

> I feel I understand something if I can do some, at least, of the following: (1) state it in my own words; (2) give examples of it; (3) recognize it in various guises and circumstances; (4) see connections between it and other facts or ideas; (5) make use of it in various ways; (6) foresee some of its consequences; (7) state its opposite or converse. This list is only a beginning; but it may help us in the future to find out what our students really know as opposed to what they can give the appearance of knowing, their real learning as opposed to their apparent learning. (s.107-108)

I doktorgradsavhandlingen til Teachey (2003) henviser hun til Krutetskii (1976) og Rachlin (1981), som etablerte noen ferdigheter elevene måtte ha dersom man skulle konkludere eller vurdere om elever har begrepskunnskap. De må ifølge Krutetskii og Rachlin vise at de innehar fire kriterier/ferdigheter:

1) Overføringsevne
2) Fleksibilitet
3) Evne til å generalisere
4) Reversibilitet

(Teachey, 2003, s. 6-7)

Dette betyr at elevene må kunne bruke kunnskapen de har utover en bestemt kontekst (1), de må kunne skifte eller oversette mellom de ulike representasjonene (2), de må kunne generalisere problemet, eller i det minste gi uttrykk for at de har skjønt den matematiske sammenhengen på et vis (3) og de må vise at de behersker å tenke reversibelt (4).

Disse fire begrepene kan settes sammen med noen av Holt (1964) sine indikatorer, noe som er illustrert i tabell 2-1.

Tabell 2-1: *Sammenligning av Holt og Krutetskii & Rachlin*

Holts kriterier/indikatorer	Krutetskii og Rachlins kriterier/ferdigheter
Gi eksempler på det, og formulere med egne ord	Generalisere
Gjenkjenne begrepet i varierte kontekster (forkledninger)	Overføringsevne
Se forbindelser mellom begrepet og andre ideer	Overføringsevne
Kunne bruke det på varierte måter	Fleksibilitet
Forutse noen konsekvenser	Generalisere
Formulere det motsatte eller omvendte av begrepet	Reversibilitet

Disse begrepene som er presentert i tabell 2-1, kan gjenkjennes i analyseverktøyet (vedlegg 4).

2.6 Begrepskunnskaper om funksjoner

Siden denne oppgaven har fokus på å se etter kunnskaper elever viser i arbeidet med lineære funksjoner, er det hensiktsmessig å klargjøre hva det betyr å ha gode begrepskunnskaper om lineære funksjoner.

Å se sammenhengen mellom de ulike representasjonsformene en funksjon kan representeres på, er viktig for å si at man har begrepskunnskaper om lineære funksjoner (Ronda, 2015, s. 303). Denne oppgaven konsentrerer seg om Janviers (1978) fire representasjonsformer. Disse blir nærmere omtalt i slutten av kapittelet. Kaput (1989) argumenterte med at «the cognitive linking of representations creates a whole that is more than the sum of its parts» (Kaput, 1989, s. 179). Å se sammenhengen mellom representasjoner innebærer mer enn bare å oversette mellom dem (fleksibilitet). Det handler også i stor grad om å kjenne igjen egenskaper og karakteristikker av funksjonen på tvers av representasjonene (Even, 1998, s. 105; Ronda, 2015, s. 305). Elevene må derfor evne å koble sammen informasjonen som ligger i de ulike representasjonene (O'Callaghan, 1998, s. 23). Dette betyr at begrepskunnskap krever at elever ser sammenhengen, den interne forbindelsen mellom representasjonene.

Janvier (1978) beskriver at å tolke en grafisk fremstilling, kan i grove trekk være å oversette den til en verbal tekst – med andre ord omformulere den til i en situasjon (kontekst). Dette betyr at elevene ser sammenhengen mellom to variabler slik de er uttrykt gjennom en graf. I matematikk og naturvitenskap finnes det flere ulike måter å uttrykke disse sammenhengene på. Han identifiserte fire representasjonsformer som funksjoner opptrer i gjennom skolematematikken. Han skilte mellom:

- Graf
- Situasjon (en verbal beskrivelse/tekst)
- Formel (algebraisk uttrykk/funksjonsuttrykk)
- Tabell

(Janvier, 1978, s. 3.2)

For å ha begrepskunnskap om funksjoner er det som tidligere nevnt viktig at elevene ser den iboende sammenhengen mellom representasjonene. I tabellen under er det presentert de ferdighetene Janvier (1978) mener elevene må ha for å oversette mellom representasjonene.

Tabell 2-2: *Translation skills*

From \ To	Situations, Verbal Descriptions	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Descriptions		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading off		Curve fitting
Formulae	Parameter recognition	Computing	Sketching	

(Tabellen er hentet direkte fra doktorgradsavhandlingen fra 1978 (s.3.2)).

Hva som ligger i de ulike ferdighetene vil ikke diskuteres i denne oppgaven.

Janvier (1978) mener at noen av disse oversettelsene går direkte, mens andre går indirekte. En indirekte oversettelse er når elevene går en omvei via en annen representasjon. Spesielt gjelder dette ved oversettelse fra formel → graf. Da viser det seg at mange elever går veien om tabell (formel → *tabell*→ graf). Det samme kan illustreres for tabell→formel, som da blir tabell→ *graf* → formel. Det er noen faktorer som påvirker selve oversettelsesprosessen. Er konteksten kjent går som regel oversettelsene direkte. Da har eleven noen mentale bilder, eller kjennskap til situasjonen, som kan støtte dem i oversettelsen. Den matematiske kunnskapen har også betydning. Dersom formelen er $y = 2(x + 2)$, vil mange elever løse opp parentesen og få $y = 2x + 4$. Hvis oppgaven hadde vært å gå fra formel → graf, kan oversettelsesprosessen illustreres slik: formel_1→ formel_2 → graf, eller formel_1→ formel_2 → tabell → graf (Janvier, 1978, s. 3.3-3.4).

2.7 Nyere forskning

Forskning innen matematikkdidaktikk har lenge vært opptatt av å beskrive elevers kunnskaper og forståelse. Siden midten av 1980-tallet har fokuset nettopp vært på disse to typene av kunnskaper: *prosedyrekunnskaper* og *begrepskunnskaper*.

Nyere forskning gjort av blant annet Star & Stylianides (2013), tar opp et viktig perspektiv som bør belyses. Hva betyr egentlig et rammeverk som baserer seg på conceptual knowledge og procedural knowledge? Det viser seg at dette kan ha flere betydninger, avhengig av om man ser på kunnskap som *type*, eller som *kvalitet*. Dette poenget hentes frem fra Star (2005), og ser man på kunnskap som en kvalitet speiler dette til måten noe er kjent eller hvor godt noe er forstått. Da kan man skille mellom hvor dyp kunnskapen er, eller hvor overfladisk den er. Dybdekunnskaper er forbundet med forståelse, fleksibilitet og kritisk sans, mens overflatekunnskapen kan kobles sammen med rote learning og reproduksjon. Dermed vil oppfatningen ut fra Hiebert & Lefevres (1986) definisjon, være at begrepskunnskap er synonymt med dybdekunnskap, og overflatekunnskap med prosedyrekunnskap. For begrepskunnskap vil kvaliteten på kunnskapen si noe om «relasjonsrikheten» som er iboende, mens for prosedyrekunnskap vil kunnskapen være sekvensiell. Det betyr at et steg i en prosedyre er forbundet med det neste steget. Slike prosedyrer må løses i et forutbestemt mønster.

Både i Star (2005) og Star & Stylianides (2013) problematiseres «type» og «kvalitet» av kunnskap. Tabell 2-3 viser dette. (J. R. Star, 2005, s. 408).

Tabell 2-3: *Types and Qualities of Procedural and Conceptual Knowledge*

Knowledge type	Knowledge quality	
	Superficial	Deep
Procedural	Common usage of *procedural knowledge*	?
Conceptual	?	Common usage of *conceptual knowledge*

Ut fra tabellen over viser det seg at prosedyrekunnskaper ikke bare kan dreie seg om hva som er kjent (kunnskap om prosedyrer), men også om hvordan prosedyrer (algoritmer) kan bli kjent. Hiebert & Lefevre (1986) problematiserer ikke dette i sin definisjon, spesielt med tanke på overfladiske og dype prosedyrekunnskaper. Det viser seg imidlertid at de forutså en kritikk av inndelingen sin og skrev at:

> No sooner than we propose definitions for conceptual and procedural knowledge and attempt to clarify them, we must back up and acknowledge that the definitions we have given and the impressions they convey will be flawed in some ways. As we said earlier, not all knowledge fits nicely into one class or the others. Some knowledge lies at the intersections. (s.9)

Baroody, Feil & Johnson(2007) spinner videre på det Star (2005) tok opp, og hevder blant annet at dybdekunnskapen han beskriver i forhold til prosedyrekunnskaper, ikke kan eksistere uten relativt dype begrepskunnskaper (Baroody, Feil & Johnson, 2007, s. 123). Har man perspektivet der kunnskap sees på som en type, vil dette bare vise til hva som er kjent, ikke nødvendigvis til hvordan dette er kjent. (J. Star & Stylianides, 2013, s. 6; J. R. Star, 2005, s. 407).

I forskning tilknyttet matematikk er kunnskapen oftest knyttet til kvalitet, selv om dette er vanskelig å måle. Dette skyldes at mange elever mestrer oppgaver og løser problemer riktig, selv om de ikke forstår det de gjør. For å avdekke dette er intervju mye brukt i slike studier (J. Star & Stylianides, 2013, s. 13-14). Dersom man leser Hiebert & Lefevre (1986) nøye, ser man at de også fremhever sammenkobling av kunnskapsbiter, og dette er helt fundamentalt for å oppnå begrepskunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

I en studie foretatt av Rittle-Johnson, Siegler og Alibali (2001), kommer det tydelig frem at forbindelsen mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap må sees på som svært viktig, og at man ikke nødvendigvis må ha fokus på hvilken kunnskapstype som skal komme først. De presenterer at økning i en kunnskapstype ofte forsterker den andre, slik at dette bør sees på som en «hånd-i-hånd-prosess». Den første kunnskapen elevene får om et tema er ofte begrenset. Dette betyr at selv om elevene vet noe om et fenomen, er ikke det det samme som at de forstår den fulle helheten av fenomenet. De sier at den tidlige kunnskapen er ekte, men bare delvis (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001, s. 347, 357-358).

Gjennom å utsette elevene for gjentatte oppgaver om det samme (pretest, intervention, posttest, transfer test), kom Rittle-Johnson et al. (2001) frem til mye av det Hiebert & Lefevre (1986) hadde annonsert tidligere. Hovedfunnene var at begrepskunnskaper forsterker prosedyrekunnskapene gjennom mekanismer som «å forstå problemet bedre» og kunne forenkle representasjonen av problemet. Videre sier de at begrepskunnskaper kan bidra til å velge de riktige prosedyrene, fordi elevene har eksisterende kunnskaper som muliggjør disse valgene. I tillegg vil elevene klare å tilpasse allerede innlærte prosedyrer til nye og andre problemer. Rittle-Johnson et al. (2001) viser også til at det er noen mekanismer som indikerer at prosedyrekunnskapene forbedrer begrepskunnskapene. Gode prosedyrekunnskaper frigjør mental plass, slik at tankevirksomheten kan brukes til planlegging, se etter sammenhenger, generere nye prosedyrer, reflektere over problemet og være kritiske til resultatet. I tillegg vil en forsterket prosedyrekunnskap muliggjøre økt begrepskunnskap i form av at de klarer å identifisere og få fjernet misoppfatninger og bruk av feil prosedyrer. Refleksjoner rundt hvorfor prosedyrer fungerer er også sentralt. Det viser seg at elever som i tillegg forklarer fakta, begreper og prosedyrer, lærer mer enn de som ikke gjør det. I en studie gjort to år tidligere av Rittle-Johnson, Alibali and Pressley (1999) kom de også frem til omtrent samme konklusjon som i studien over (Rittle-Johnson et al., 1999, s. 186-187). Rittle-Johnson et al. (2001) poengterer at fremtidig forskning er nødvendig for å vurdere hvorvidt disse mekanismene er levedyktige (Rittle-Johnson et al., 2001, s. 359).

2.8 En ytterligere presisering av prosedyre- og begrepskunnskap slik de er brukt i denne oppgaven

Med tanke på den nyanserte kunnskapen rundt prosedyre- og begrepskunnskap som har kommet frem i det forrige kapittelet, må det presiseres at det er Hiebert & Lefevres (1986) definisjoner av begrepene som er brukt videre i denne oppgaven. Det er disse som gjenspeiles i analyseverktøyet. Forhold som Star (2005) og Baroody et al. (2007) tar opp i forhold til overfladiske og dype kunnskaper ikke er tatt høyde for i resultatene og analysen.

Uansett, begrunnelsen for valget var at utgangspunktet for oppgaven var å se hvilke kunnskaper elevene hadde opparbeidet seg gjennom arbeidet med temaet, og ikke nødvendigvis kvaliteten av kunnskapen, slik Star (2005), Baroody et al. (2007) og Star & Stylianides (2013) legger frem. Fokuset i denne oppgaven ligger mer på koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskaper, og hvordan disse gjensidig påvirker hverandre, uten å ta hensyn til flere nivåer i kunnskapen.

3. Metode og vitenskapsteoretisk perspektiv

I dette kapittelet skal jeg redegjøre for metodiske tilnærminger som er gjort i denne studien, og begrunne de ut fra oppgavens egenart. Først kommer en begrunnelse for valget av selve forskningsmetoden, deretter en kort presentasjon av det vitenskapsteorietiske perspektivet som oppgaven bygger på. Det vil bli en redegjørelse for valgene av informantene og oppgavesettet, for hvilke datainnsamlingsmetoder som ble benyttet og en del om hvordan rammeverket er satt sammen til et analyseverktøy. Mot slutten vil jeg belyse validiteten, reliabiliteten, overførbarhet og etiske betraktninger, før det avslutningsvis knyttes noen kommentarer til metode- og kildebruk.

3.1 Valg av metode

I vitenskapelige undersøkelser som har en hovedintensjon om å studere et enkelt eller flere fenomener, er det nødvendig å kjenne til og vurdere ulike metoder, som kan få frem de ønskede dataene. For å kunne gjøre dette på en god måte må forskeren ha god innsikt i ulike forskningsmetoder, både kvalitative og kvantitative metoder. Ut fra fokuset og oppgavens egenart, har jeg valgt å definere oppgaven som kvalitativ forskning. Dette kan begrunnes med blant annet det Denzin og Lincoln (2011) skriver om kvalitativ forskning. Dette er forskning som er en situert aktivitet og dermed plasserer forskeren i selve forskningsfeltet. Gjennom å være tilstede i forskningsfeltet blir virkeligheten synlig og man kan betrakte situasjonen fra flere perspektiver. I kvantitativ forskning, der man eksempelvis har et stort antall spørreskjemaer å gå igjennom, blir det vanskelig å bruke situasjonsbetingede perspektiver i tolkning og analyse. Gjennom notater, observasjoner, intervjuer, samtaler, lydopptak og lignende, blir undersøkelsene i kvalitativ forskning gjort i en naturlig setting. Med andre ord foregår forskningen i et naturlig miljø, for eksempel i et klasserom eller en undervisningsøkt (Denzin & Lincoln, 2011, s. 3).

I kvalitativ forskning er det viktig å etablere et forhold mellom forsker og deltager som ikke baserer seg på en fjern og objektiv distanse, men heller et nært samarbeidsforhold (Kvarv, 2014, s. 137; Postholm, 2010, s. 34). Ofte er det slik at relasjonen mellom forsker og deltager er mindre formell i kvalitativ forskning enn ved kvantitativ forskning. I tillegg betegnes kvalitativ forskning som mer fleksibel. I dette ligger det at kvalitativ forskning aksepterer ulike grader av spontanitet underveis. Dette kan dreie seg om ulike tilpasninger i samspillet mellom forsker og deltager, slik som åpne og redigerbare spørsmål, som for øvrig kan stilles forskjellig fra deltager til deltager. Deltagerne kan på sin side, i langt større grad, påvirke og besvare spørsmålene med egne ord. Denne spontaniteten muliggjør blant annet det å kunne svare mer utfyllende og detaljert på spørsmålene enn ved kvantitative undersøkelser, som på sin side kan betegnes som lite fleksible. I kvantitative undersøkelser vil alle deltagerne bli stilt ovenfor de samme identiske spørsmålene og i samme rekkefølge. Fordelen med dette er at det kan gi mening å sammenligne svar på tvers av deltagere og settinger. Når det er sagt, setter dette store krav til den som skal utforme spørsmålene. Den må kjenne til hvilke spørsmål det vil være viktig å stille, hvordan disse best mulig skal formuleres, og til slutt hva som kan være aktuelle og mulige svar (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 17; Thagaard, 2016, s. 18).

I denne studien deltok fire informanter. Det ble viktig for meg at de skulle få et avslappet forhold til meg som forsker. Relasjonen skulle være trygg og god. Jeg prøvde å vise deltagerne at hjelpen de bidro med betydde utrolig mye for meg, og at det var viktig at de gjorde sitt ytterste og var ærlige. Med bakgrunn i dette ble det naturlig å ha en uformell, men samtidig faglig og trygg tone. Jeg valgte å løse det slik at jeg i forkant av selve datainnsamlingen hadde flere samtaler med alle fire samtidig. Der prøvde jeg å ufarliggjøre den rollen de skulle ha, uten å røpe for mye av hva de skulle gjøre. De fikk også muligheten til å stille meg spørsmål hvis det var noe de lurte på eller var usikre på. I tillegg installerte vi Screencast-O-matic (skjermopptagingsprogram) og Geogebra på datamaskinene som de skulle bruke i undersøkelsen.

Etter mange års erfaring i skoleverket, både i grunnskole og videregående, har jeg blitt overbevist om at de fleste elevene er svært forskjellige og har ulike faglige behov. I den forbindelse ble det sentralt å finne en metode som ivaretok dette aspektet. Jeg måtte finne en fleksibel metode som tillot å stille forskjellige spørsmål til hver av deltagerne der det var naturlig. Deltagerne på sin side måtte få utfolde seg og forklare seg med egne ord, ikke begrenset av noen svaralternativer eller maks antall ord. Da var jeg avhengig av å kunne tilpasse spørsmålene underveis, og samtidig ha muligheten til å respondere på det som ble sagt. Slik kunne jeg skreddersy neste oppfølgingsspørsmål. Et annet viktig moment er at mange av spørsmålene som ble stilt i intervjuet var basert på de skjermopptakene hver enkelt hadde gjort dagen før. Flere av deltagerne hadde løst noen av oppgavene med forskjellig vri, slik at det ville vært unaturlig å ha et fast spørreskjema (intervjuguide).

Siden jeg skulle studere fire elever inngående, ble det naturlig at jeg valgte en kvalitativ metode med hovedfokus på casestudie. Rettere sagt vil denne oppgaven være en casestudie innenfor et fenomenologisk rammeverk. Casestudier vil bli grundigere omtalt i kapittel 3.2, og det vitenskapteoretiske perspektivet (fenomenologi og hermeneutikk) presenteres i kapittel 3.3.

Karakteristisk for kvalitativ forskning er at den tar utgangspunkt i informantenes perspektiver på virkeligheten, og at man gjennom dette prøver å forstå deres oppfatninger rundt problemet (Alvesson & Sköldberg, 2008, s. 17). Dette er egentlig hele fundamentet i denne oppgaven – å gripe tak i informantenes livsverden og tolke de ut fra det gitte rammeverket.

Selve fasene i forskningsprosessen overlapper hverandre, noe som kan være en fordel når jeg i dette opplegget vandrer litt ut og inn mellom teori og data. Spesielt kan man se at analyse og tolkning er gjennomgående aktiviteter. Dette var merkbart allerede under intervjuet. Der reflekterte jeg over hvordan det som kom frem kunne fortolkes i lys av teorien. På en annen side er det også unaturlig å skille mellom analyse og tolkning i slik forskning, siden forskeren er fysisk tilstede på forskningsfeltet. Jeg arbeidet hele tiden med å få oversikt over datamaterialet, og reflekterte over dataenes betydning. Dermed tilegnet jeg meg perspektiver og synspunkter for hvordan man kunne forstå dataene (Thagaard, 2016, s. 32).

3.2 Hva er en casestudie (casedesign)?

Ordet *case* stammer fra det latinske *casus*, som oversettes til *tilfelle*. Denne masteravhandlingen har jeg definert som en kvalitativ casestudie. Dette kan begrunnes ut fra valget med å studere noen få enkeltindivider relativt inngående, og det jeg ønsket å se nærmere på er hentet fra praksisfeltet. Problemet kan også være av generell interesse, spesielt med tanke på lærere som underviser på tilsvarende nivå, eller lærere som underviser på ungdomstrinnet (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 109-111).

Casestudier brukes mye i tilknytning til forskning om utdanning. Forskeren innhenter mye informasjon fra få enheter, over kortere eller lengre perioder. I mitt tilfelle var det snakk om et tidsperspektiv på omtrent tre dager. Informantene løste oppgavesettet, og de ble i etterkant intervjuet. Intervjuet var basert på hvordan de hadde løst oppgavene, og dermed hvordan kunnskapen og forståelsen til hver enkelt informant fortonet seg. Yin (2007) deler inn casestudier i *teoristyrte* og *beskrivende*. Beskrivende casestudier brukes oftest dersom man på forhånd ikke har noen teoretiske antagelser, dermed blir studiens hovedfokus å forske på forskningsobjektene i deres naturlige setting. Videre må man da prøve å gjenfortelle den sosiale virkeligheten mest mulig nøyaktig og autentisk. Siden det allerede finnes forskning og teori på feltet som denne oppgaven tar for seg, kan man si at oppgaven er en teoristyrt casestudie. I en slik studie er analysen av datamaterialet basert på teoretiske antagelser og funnene som fremkommer tolkes i lys av eksisterende teori innenfor feltet. Gjennom analyseprosessen vil forskeren la seg lede av de teoretiske antagelsene han på forhånd har gjort, og disse styrer selve prosessen. Med andre ord har slike studier til hensikt å støtte, illustrere og utvikle allerede eksisterende teorier (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 110; Postholm, 2010, s. 51).

I oppgaven har analysen dreid seg om tekster (transkriberte intervjuer), der jeg har prøvd å skape en forståelse ut fra teksten, med hjelp av selve analyseverktøyet som rammeverk. Yin (2007) legger spesielt vekt på fem komponenter ved en casestudie. Disse blir presentert under med kommentarer knyttet til masteroppgavens egenart.

1. <u>Problemstilling</u>

Problemet i oppgaven er hentet fra praksisfeltet, og det er rimelig å anta at dette er av generell interesse. Det som har styrt meg, er spørsmål som kan få frem ulik kunnskap og forståelse (hva, hvorfor, hvordan, hvilke).

2. <u>Teoretiske antagelser</u>

Etter at problemstillingen ble ferdig, kom jeg frem til noen antagelser som har fulgt meg gjennom hele prosessen. I følge Yin (2007) ligger disse antagelsene til grunn for den videre forskningen. En antagelse er at elever, spesielt de svake, i hovedsak etablerer det som kan ansees som prosedyrekunnskap når de arbeider med Geogebra (eventuelt et annet digitalt hjelpemiddel). Det jeg ville finne ut av, var om de hadde opparbeidet seg rutinepregede prosedyrer som bidro til at de kunne løse bestemte typer av oppgaver, ved hjelp av Geogebra. Under intervjuet måtte de prøve å forklare de bakenforliggende matematiske strukturene. Det kom tydelig frem hvem som hadde begrepskunnskap og hvem som hadde prosedyrekunnskap.

3. Analyseenheter

Det er et utvalg på fire elever som danner utgangspunktet for analysen. Prosjektet kan dermed defineres som et enkelt casedesign med flere analyseenheter, fordi informasjonen er hentet fra flere analyseenheter innenfor et avgrenset system (skole/klasse). Perspektiver som utvalgsstrategier, antall informanter, rekruttering og tid, var viktig å få avklart tidlig i prosessen.

4. Den logiske sammenhengen mellom data og antagelsene

I teoristyrte caser som denne, tolkes dataene og funnene opp mot allerede eksisterende teori og litteratur på området. Forskerens forforståelse, holdninger og verdier, samt de antagelsene som er gjort, følger forskeren i arbeidet gjennom hele prosessen. Analyseverktøyet som jeg utviklet var bakteppe for intervjuspørsmålene sammen med det informantene gjorde under oppgaveløsningen. Analyseskjemaet var selve utgangspunktet for datareduksjonen og analysen.

5. Kriterium for å tolke funnene

Teoretisk analyse dreier seg om analyse og tolkning av dataene opp mot etablerte teorier på området. Analysen har tatt utgangspunkt i de transkriberte intervjuene, der jeg har prøvd å skape en mening ut fra kriteriene i analyseverktøyet (se fremgangsmåten i kapittel 3.6.4). Målet var å finne mønstre, eller trekk som gikk igjen i datamaterialet (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 111-113).

3.3 Vitenskapsteorietisk perspektiv

3.3.1 Fenomenologi

Tanker og refleksjoner rundt datamaterialets betydning og meningsinnhold er spesielt viktig i de siste stadiene av forskningsprosessen, selv om dette egentlig foregår gjennom hele prosjektet. Den forståelsen vi drar ut av datamaterialet må sees i sammenheng med forforståelsen som forskeren har med seg inn i forskningsprosjektet. Thagaard (2016) sier at tolkning og analyse er to sider av samme prosess, og at man tillegger hendelser mening etter hvert som man kategoriserer og beskriver disse prosessene. På denne måten kan også forskerens refleksjoner av egne erfaringer bidra til å skape utgangspunkter for forskning (Thagaard, 2016, s. 37,40).

Problemstillingen har til hensikt å utforske informantenes livsverden, det er deres meninger, ytringer og forklaringer som i stor grad utgjør datagrunnlaget i denne oppgaven. Det er meningen som informantene legger i opplevelsene, eller forklaringer knyttet til et bestemt fenomen, som studeres (Postholm, 2010, s. 41). Jeg er med andre ord ute etter de subjektive forklaringene, og på den måten prøve å forstå enkeltindividenes forklaringer dypere. En slik tilnærming av datamaterialet og forskningen kan klassifiseres som fenomenologisk. Det som beskrives er de felles mønstrene eller trekkene som informantene har fått frem gjennom datamaterialet (Postholm, 2010, s. 43-44; Thagaard, 2016, s. 40).

Fenomenologiske studier kan grovt deles inn i to: 1) sosiologisk perspektiv og 2) psykologisk, individuelt perspektiv. Denne oppgaven har et psykologisk, individuelt perspektiv fordi den har til hensikt å få tak i enkeltindividers forklaringer, samtidig prøve å finne ut hvordan det samme fenomenet erfares av flere individer. Det sosiologiske perspektivet undersøker samspillet mellom personer, og hvordan disse bevisst utvikler mening i den sosiale settingen. Intensjonen i slike perspektiver er å forske på grupper av mennesker (Postholm, 2010, s. 41,44).

Ordet fenomenologi har sitt opphav fra det greske ordet *fainomenon*, som kan oversettes til «det som kommer til syne», eller «læren om det som viser seg». Det er nettopp dette fenomenologisk forskning tar sikte på – å undersøke det som kommer frem gjennom menneskers erfaringer med omverden. Fenomenologien har sine røtter tilbake til Edmund Husserl (1859-1938), og Descartes. Ut fra Husserls fenomenologi kan man si at denne prøver å undersøke strukturer i bevisstheten til mennesker, og hvordan fenomener fremtrer for oss fra et førstepersonsperspektiv. Disse førstepersonserfaringene tolkes og betraktes med så få fordommer som mulig. Allikevel vil disse betraktningene være styrt av personens erfaringsbakgrunn og verdier (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 99; Kvarv, 2014, s. 87; Mortensen et al., 2008, s. 38; Postholm, 2010, s. 42).

Intensjonalitet er et sentralt begrep hos Husserl, og er det begrepet som fenomenologien har sitt utspring fra. Kvarv (2014) skriver at alle de menneskelige bevisstheter kan kjennetegnes av intensjonalitet. Dette peker mot at bevisstheten oftest er rettet mot noe, eller handler om noe. Det vil alltid være en type samspill mellom personer og verden, det er dette samspillet som skaper mening og forståelse (Kvarv, 2014, s. 87,91-92; Postholm, 2010, s. 42).

Oppgaven har til hensikt å kaste lys over hver enkelt informants erfaringer og kunnskaper rundt lineære funksjoner. Deretter vil jeg se om det er noen fellestrekk eller felles mønstre som dukker opp i datamaterialet. Disse fellestrekkene skal jeg bruke i diskusjonsdelen for å svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene som er presentert i kapittel 1.3.

Det er viktig for meg å påpeke at den kunnskapen som utvikles gjennom analysen i oppgaven, ikke blir sett på som en absolutt sannhet. Undersøkelsen gir kun tydelige svar for det utvalget som er presentert, på akkurat dette tidspunktet. Dette er i tråd med det boka Kjønnsteori (2008) skriver «at all kunnskap er situert og relativ til den erfarende bevisstheten og til den konteksten en gitt tidsbestemt erfaring hører hjemme i» (Mortensen et al., 2008, s. 38).

3.3.2 Hermeneutisk tilnærming

I fortolknings- og analyseprosessen er hoveddatagrunnlaget transkriberingen av intervjuene, altså tekster. Hermeneutikk handler om både det å tolke og forstå tekster. I prinsippet er det ikke bare tekster som kan fortolkes, men også personers handlinger. Med fortolkning/analyse menes i dette tilfellet å utforske meningsinnholdet i transkriberingen og handlinger på et dypere plan enn det som umiddelbart kommer frem gjennom teksten (Lægreid, Skorgen & Hagen, 2014, s. 9-10).

I analysen har det vært fortolkning av mening og kunnskap som har stått sentralt. Fortolkningen og forståelsen er basert på noen *fordommer* og en *forforståelse*, noen allerede etablerte forutsetninger. Disse utgjør til sammen det som kalles *forståelseshorisonten* (Kvarv, 2014, s. 73,79).

Gjennom mange år som matematikklærer, både på ungdomstrinnet og i videregående, har jeg utviklet noen fordommer og forforståelser knyttet til «forståelse i matematikk». Hvis noen hadde stilt meg spørsmålet «hva det vil si å ha forståelse i matematikk?» bare for noen år siden, ville jeg antageligvis svart annerledes enn jeg ville gjort nå. I den første lærerjobben jeg hadde, ble jeg opplært av erfarne og «gammeldagse» lærere og adopterte undervisningen ukritisk. Hovedtanken, litt flåsete sagt, var å komme gjennom pensum, preppe elevene for eksamen, heve de gode og la de mindre gode seile sin egen sjø. Fokuset på det som tidligere i denne oppgaven er beskrevet som begrepskunnskap, ble i stor grad nedtonet. Det er først i dette masterstudiet, og spesielt i arbeidet med denne oppgaven, at jeg mer presist kan si hva som menes med «forståelse i matematikk». Alle disse oppfatningene jeg hadde med meg fra før, og all den teorien jeg har lest knyttet til denne oppgaven, danner min forståelseshorisont. Denne har jeg med meg inn i fortolkningsprosessen av datamaterialet.

I fortolkningsprosessen av intervjutekstene kommer den hermeneutiske sirkelen inn, som en dynamisk frem- og tilbakeprosess mellom delen og helheten, mellom forforståelsen og forståelsen. Det ble gjort midlertidige fortolkninger av teksten, i form av å kategorisere hva som kunne betegnes som prosedyrekunnskap, og hva som kunne betegnes som begrepskunnskap. Deretter gikk jeg inn i detaljene, og videre undersøkelser av disse førte til at fortolkningen ble styrket, og noen ganger måtte de revurderes. Hele denne sammensatte prosessen er en vekselvirkning av det å se på helheten av fenomenet og deler av det opp mot hverandre, og som antas å være grunntanken i den opprinnelige hermeneutiske sirkelen (Kvarv, 2014, s. 76).

3.4 Valg av og beskrivelse av informantene

Et kjennetegn på kvalitativ forskning er at en prøver å søke mest mulig informasjon ut fra et begrenset antall personer. Det vil naturlig nok i den forbindelse dukke opp spørsmål om hvor mange informanter utvalget bør bestå av for at resultatet skal bli mest mulig troverdig. Det finnes ingen tydelige grenser, hverken nedre eller øvre, for antall intervjuer eller observasjoner en undersøkelse bør ha. Dermed blir dette en avveining som forskeren selv må ta. Hovedfokuset omkring denne avveiningen bør være om man har nok informasjon til å finne ut det en trenger å vite (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 20-21; Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 49-50; Postholm, 2010, s. 43).

Problemstillingen og tittelen på oppgaven, viser ikke til generelle trekk ved kunnskap og forståelse hos norske elever, men til hvordan fire elever viser dette i arbeidet med lineære funksjoner. Basert på dette er kanskje ikke denne oppgaven egnet til å trekke generelle konklusjoner eller påstander, men at den heller peker på funn som gjelder for disse fire elevene. Dermed er ikke utvelgelsen av informantene gjort med bakgrunn i et representativitetsprinsipp, snarere heller ut fra hensiktsmessighet (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 49-50; Thagaard, 2016, s. 65).

Thagaard (2016) skriver at kvalitative studier tar utgangspunkt i *strategiske utvalg*. I dette ligger det at de aktuelle deltagerne har de strategiske egenskapene eller kvalifikasjonene som trengs med tanke på utforskning av problemstillingen. I denne undersøkelsen kan man si at elevene som utgjør utvalget har vært igjennom temaet, og slik sett tilfredsstiller det strategiske kravet for deltagelse i studiet. Dette henger videre sammen med det som Thagaard (2016) omtaler som *teoretisk utvalg*. Utvalget må være hensiktsmessig både i forhold til det teoretiske og det empiriske grunnlaget, som dermed kan gi noe data som gjør det mulig å utforske de teoretiske perspektivene (Thagaard, 2016, s. 60).

Undersøkelsen ble gjort på fire informanter som alle går VG3 Påbygging til generell studiekompetanse ved en videregående skole på Østlandet. Alle informantene er 18 år eller mer ved undersøkelsestidspunktet. Utvelgelsen av de fire elevene ble foretatt av gruppens faglærer i matematikk, jeg var ikke delaktig i den prosessen, men hadde et ønske om at det skulle være litt faglig spredning mellom dem. Begrunnelsen for den faglige spredningen var for å prøve å avdekke og nyansere bildet av begrepskunnskapene og prosedyrekunnskapene. Jeg tenkte slik, at dersom alle informantene hadde tilnærmet de samme styrkene, eventuelt tilnærmet de samme utfordringene, ville det vært rimelig å anta at resultatene fra undersøkelsen hadde blitt skjevt fordelt.

Datainnsamlingen ble gjort i uke 2 (2018) og på forhånd hadde hele gruppen på 16 elever vært igjennom og blitt undervist i temaet. Læreren hadde aktivt brukt Geogebra i undervisningen og vist hvordan man tegner, sammenligner og tolker grafer med hverandre. Alle informantene har hatt minst ett års opphold fra matematikkundervisningen, slik at ferdighetene i Geogebra kunne ansees som nybegynner-ferdigheter i oppstarten av temaet.

Denne masteroppgaven tar ikke høyde for å kategorisere informantene etter kjønn eller annen bakgrunn, og slik sett forholder analysen og diskusjonen seg på et kjønnsløst nivå. Det kunne selvsagt vært interessant å blant annet se på kjønnsforskjeller, men det er det ikke rom for i denne oppgaven.

I det neste kommer korte beskrivelser av informantene. Dette blir gjort for at leseren skal få et kort innblikk og en liten oppfatning av informantenes faglige nivå og motivasjon.

Isak betegnes som faglig sterk. Faglærer beskriver han som reflektert, og en elev som tar gode og tidvis veloverveide valg. Han skiller seg ut fra klassen generelt ved å være en av svært få som faglærer kaller det å være teknisk god på Geogebra. Isak har en del erfaring fra yrkeslivet gjennom sin lærlingtid, noe han benytter aktivt i ulike resonnementer i matematikkfaget. Isak liker å bruke Geogebra til å løse oppgaver.

Max omtales av faglærer til å være en godt-presterende elev, men at han ofte mangler det lille ekstra for å nå helt opp rent karaktermessig. Han er kjapp med Geogebra og bruker dette effektivt i løsning av oppgaver. Max forteller selv at han liker å løse oppgaver i Geogebra. Han kan være kritisk til egne svar, men stort sett satser han på at det han har gjort er riktig.

Julia stiller velvillig opp, men er den eleven som faglærer ser på som svakest av disse fire. Hun har prestert langt under middels så langt dette skoleåret. Ferdighetene på Geogebra er middels. Hun sier selv at hun ikke har jobbet noe særlig med dette, og er i utgangspunktet negativ til matematikk generelt.

Anna er ei positiv jente som stilte velvillig opp i dette prosjektet, og så muligheten til å lære mer om Geogebra. Etter uttalelser fra faglærer benytter Anna seg en del av Geogebra i oppgaveløsning, men han er ikke sikker på om hun bare kan prosedyrene, og at det derfor ligger liten matematisk forståelse bak. Hun viser at hun stort sett kan mye av det tekniske i programmet.

3.5 Oppgavene

I det neste kommer en begrunnelse for valg av oppgavene, og det kommenteres til slutt noen sterke og svake sider ved oppgavesettet.

3.5.1 Begrunnelser for valg av oppgaver

I arbeidet med å planlegge datainnsamlingen lagde jeg noen oppgaver som skulle få frem informasjon som kunne svare på problemstillingen (vedlegg 3). Elevene i gruppen hadde hatt undervisning om lineære funksjoner, og arbeidet med ulike representasjonsformer. Spesielt hadde de hatt fokus på graf, formel og tabell, noe også boka fokuserer på. Boka skriver at «En funksjon kan være representert ved et funksjonsuttrykk, en graf eller en tabell» (Borgan, Engseth, Heir & Moe, 2014, s. 69). Videre er fokuset i boka knyttet til begreper som stigningstall og konstantledd. Boka tar også for seg detaljerte beskrivelser av hvordan man benytter seg av Geogebra i oppgaveløsningen og har lagd en generell brukermanual (Borgan et al., 2014, s. 80-81, 85,373-375).

Oppgavesettet jeg lagde var nært knyttet til de oppgavetypene som boka, terminprøver og til dels eksamen legger opp til. Begrunnelsen for dette valget er at oppgavene og de dataene som fremkommer, må stå i samsvar med de forventede kunnskapene som elevene skal ha etter endt undervisning. Et spesielt fokus for de første oppgavene var å knytte begrepene stigningstall og konstanledd opp mot grafer og formler, bruke disse til å oversette mellom de ulike representasjonene og se sammenhengen mellom dem. De tre siste var virkelighetsnære og praktiske oppgaver knyttet til lineær vekst der informantene måtte bruke kunnskapen og forståelsen for å vise dette i varierte kontekster.

Oppgavene og det som det ble spurt etter i intervjuet, er også i tråd med det kunnskapsløftet krever av elevene. I læreplanen i matematikk for påbygging til generell studiekompetanse, under hovedområdet Funksjoner i praksis står det at:

> Mål for opplæringen er at elevene skal kunne (*) gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt, (*) omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar og (*) bruke funksjonar til å modellere, drøfte og analysere praktiske samanhengar (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. Kompetansemål).

3.5.2 Refleksjoner – oppgavenes styrker og svakheter

Oppgavene totalt sett, inkludert intervjuseansen, mener jeg får frem et helhetlig bilde som kan gi meg noen svar på det undersøkelsen har til hensikt å få frem. Mange av oppgavene får frem en tydelig konvertering mellom representasjoner, som gir informantene muligheten til å vise at de behersker dette. Oppgavenes svakhet er blant annet at alle overgangene mellom representasjonene, slik Janvier (1978) beskriver de (Janvier, 1978, s. 3.2), kanskje ikke kommer tydelig nok frem. Riktignok kommer flere overganger frem under intervjuet, men dette er selvsagt noe man må være kritisk til i tolkningen av resultatet. Allikevel mener jeg det er mulig å peke på noen funn som er felles for flere av informantene. Med bakgrunn i egne erfaringer og informantens lærebokfokus, har jeg valgt å konsentrere meg spesielt om overganger mellom formel – graf (plotting), formel – tabell (beregning), graf – formel (kurvetilpasning), situasjon – formel (modellering), situasjon – graf (skisse). Begrepene i parentes er hentet fra Utdanningsdirektoratets heftet om *Funksjoner* (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 5).

3.6 Valg av metoder til datainnsamlingen

Hvilken metode man velger blir speilet gjennom problemstillingen. Hvordan skal man på best mulig måte få tak i den informasjonen man er ute etter? Dette er et helt avgjørende spørsmål, som er viktig å få avklart så tidlig som mulig i prosessen.

3.6.1 Filming og lydopptak

Avveiningen mellom observasjon, notater og opptak er alltid noe forskeren må ta stilling til før datainnsamlingen starter. Opptak er å foretrekke, dersom den som intervjues tillater det. Fordelen med opptak kan forsvares med bakgrunn i flere faktorer. Opptak gjør at alle spørsmål som stilles, og alt som sies vil bli bevart. Det gir forskeren mulighet til å ha fullt fokus på intervjuobjektet og hvordan personen responderer og reagerer. Forskeren kan dermed respondere umiddelbart på det intervjuobjektet formidler. Skal det brukes sitater eller utsnitt fra intervjusituasjonen, finnes dette ordrett på lyd- eller videoopptaket. Av og til kan kroppsspråket fortelle mye og filming vil være en metode som fanger opp dette (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 89; Thagaard, 2016, s. 111-112).

I motsetning til opptak, vil notater være en alternativ metode. Denne metoden vil redusere mengden av datamateriale betraktelig. Det er nærmest umulig å skrive ned alt som blir sagt under et intervju, og i tillegg vil oppmerksomheten i stor grad være rettet mot noteringen og ikke mot intervjuobjektet. Det å skrive notater vil i tillegg være preget av analyse og tolkning, fordi forskeren prøver å sortere informasjonen etter hvert som man skriver (Thagaard, 2016, s. 112).

Under intervjuene som ble gjort i denne oppgaven ønsket jeg å rette full oppmerksomhet mot informantene og det de kom med, for å best mulig kunne studere elevenes kunnskap og forståelse på området. Dermed valgte jeg video som dokumentasjon. Ved bare å skrive notater fra intervjuene mener jeg at nyanser og detaljer som kom tydelig frem under opptaket ville vært fraværende. Dette kan eksempelvis dreie seg om kroppsspråk (peking og andre kroppslige signaler), som er vanskelig å få med seg når man skriver notater, men som kan ha stor betydning for tolkningen av datamaterialet. En av informantene pekte for eksempel på grafen da han forklarte om stigningstallet. Pekingen understøttet at han hadde skjønt hva dette dreide seg om. Andre faktorer som man enklere får med i et opptak er smiling, latter, oppgitthet, blikkontakt og pauser i forklaringer.

3.6.2 Det kvalitative intervjuet – et semistrukturert intervju

Hvorfor har jeg valgt intervju som innsamlingsmetode? Svaret på det for sammensatt til at det kan begrunnes i en enkelt setning. Intervjuet er et viktig forskningsredskap, som det kan komme mye nyttig og god informasjon ut av. I en fenomenologisk tilnærming er intervjuet sentralt som metode for datainnsamling (Postholm, 2010, s. 43).

Intervjuet er blitt den mest utbredte tilnærmingen til kvalitativ forskning, derav kanskje den viktigste empiriske metoden. Intervjuet er en metode som gjør det mulig å innhente fyldige og detaljerte beskrivelser om fenomener. Når forskeren intervjuer informanter er det for å danne seg et innblikk i andre menneskers opplevelser og oppfatninger, sett fra deres ståsted. For å få gode og ærlige svar, er det viktig å ikke stille spørsmål som er for sensitive, spørsmål som kan gjøre intervjuobjektet ukomfortabel (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 19; Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 77). Gjennom intervjuprosessen, spesielt i piloteringen, ble jeg raskt påmint om at å stille gode spørsmål som stimulerer til gode svar, er langt vanskeligere enn først antatt.

Samtaler og språket, som medierende redskap, har alltid vært en viktig del av menneskenes livsverden. Ved hjelp av språket kan mennesker få innsikt i hverandres følelser, erfaringer, tankegang og holdninger. På denne måten kan vi få en forståelse av hva som foregår i andres bevissthet, i tillegg vil en kunne få tak i både sterke og svake sider, begrensninger og muligheter ved denne bevisstheten (Postholm, 2010, s. 69). Dette har vært vesentlig for forskningsarbeidet mitt, siden intervjuet i all hovedsak skulle vise hvilke kunnskaper elevene hadde etter endt undervisning om temaet. Uten intervjuet, som på sin måte har hjulpet meg til å få innsikt i elevenes tankegang, oppfatninger og kunnskaper, ville ikke oppgavene alene og isolert sett klart å peke på alt dette.

Videre er det viktig å gjøre seg noen tanker rundt analyseprosessen fra et intervju, og at det aldri vil kunne si noe helt nøyaktig om det intervjuobjektet forteller. Man må alltid ta høyde for at det som blir sagt uansett vil være konstruert i selve intervjusamspillet (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 20). Et intervju vil alltid ha en asymmetrisk relasjon. I dette ligger det at forskeren har makten, som en som planlegger temaet for intervjuet, definerer intervjusituasjonen og driver det hele fremover. Det er intervjuobjektet som blottlegger og åpner seg, og slik sett lider den største belastningen i situasjonen. Når dette er sagt, vil intervjuet sett fra et konstruktivistisk ståsted se på resultatene som et sosialt samspill mellom forsker og deltager. Dette betyr at både forskeren og intervjuobjektet bidrar til den kunnskapen og andre perspektiver som utvikles gjennom samspillet. På sin side har den som intervjues kontroll på det som blir sagt og formidlet, og dermed total kontroll på det forskeren får vite (Thagaard, 2016, s. 95-96). For å prøve å etablere en mindre asymmetrisk relasjon hadde jeg på forhånd blitt bedre kjent med informantene. Jeg prøvde også å lage en rolig og trygg atmosfære under intervjuet. Jeg var lyttende og lot de snakke ferdig før jeg stilte neste oppfølgingsspørsmål.

Intervjuer kan utføres på forskjellige måter. Fra det uformelle (ustrukturerte og åpne intervjuet), som er mer som en samtale mellom to personer, der hovedtemaene er bestemt på forhånd, til det formelle (strukturerte). Det formelle intervjuet dreier seg om et strukturert opplegg der spørsmålene er formulert på forhånd, rekkefølgen på spørsmålene er satt og situasjonen er lite fleksibel. Dette egner seg i situasjoner der man skal sammenligne flere personer, fordi alle har sagt noe om de samme temaene. For denne oppgaven ble ikke disse to ytterpunktene aktuelle. Jeg måtte finne en mellomting, og landet på det delvis strukturerte intervjuet (semistrukturert). Jeg var avhengig av å kunne hoppe litt mellom spørsmålene, ha muligheten til å endre og tilpasse spørsmålene etter hvert som intervjuprosessen gikk sin gang. På denne måten hadde jeg mulighet til å respondere og ta tak i interessante situasjoner som oppsto, selv om temaene i stor grad var etablert på forhånd (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 24; Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 78-79; Thagaard, 2016, s. 97-98).

3.6.3 Forskeren som forskningsverktøy

Forskeren er en nøkkelperson i kvalitativ forskning. Forskeren skal på best mulig måte få et godt datagrunnlag fra informantene. Det er tidligere nevnt noe om viktigheten av å etablere et godt samarbeidsforhold mellom forsker og informanter. På sin side har forskeren med seg en del verdier, erfaringer og oppfatninger som naturlig nok preger forskningen og studiet. Objektivitet er sentralt, men det er nesten uunngåelig å ikke ha med det subjektive inn i analyse og tolkning av datamaterialet, noe som selvsagt kan påvirke troverdigheten av selve prosjektet (Poggenpoel & Myburgh, 2003, s. 418). Forskeren må være bevisst over makten han råder over i forbindelse med utvelgelsen av interessante data, samtidig være klar over at andre forskere kanskje ville valgt ut noe annet. Dette knytter seg i stor grad til forskerens forståelseshorisont. Denne vil, ofte ubevisst, prege *hva* forskeren eksempelvis observerer, og *hvordan* disse vektlegges eller tolkes (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 22).

I denne studien er intervjuene hovedgrunnlaget for datamaterialet. Intervju er en samspillsituasjon, og det er nærmest umulig å unngå at interaksjonen mellom forsker og deltager ikke påvirker selve kommunikasjonen eller svarene som gis. Den som blir intervjuet tilpasser seg forskerens forventninger og standarder, i form av forskerens sosiale status, bekledning, alder, kjønn, oppførsel osv. I tillegg vil forskeren i en slik situasjon tolke og analysere dataene man får subjektivt, og man kan få et innslag av det som omtales som *forskningseffekten*. Denne effekten må forskeren ta hensyn til i bearbeidelsen av dataene (Kvarv, 2014, s. 139). Kvalitativ forskning kan betraktes som verdiladet. Det som ligger i det, slik jeg tolker det, er at forskeren tidlig har sett for seg noen problemstillinger og forskningsspørsmål som er aktuelle og interessante før man trer inn i forskningsfeltet. I en slik sammenheng er det selvfølgelig viktig å møte dette feltet med et åpent sinn, men ikke med et tomt hode, som i all hovedsak betyr at forskeren ikke kan legge vekk sin egen forforståelse (Brinkmann & Tanggaard, 2012, s. 27-28; Postholm, 2010, s. 127-128).

Spørsmålet om objektivitet og subjektivitet vil dermed alltid melde seg. Et oppfølgingsspørsmål til dette kan være: «Hvor stor rolle skal dette spille for kvalitativ forskning?». Postholm (2010) skriver at forskeren må beskrive og klargjøre rollen som forsker, både for seg selv og andre. Hun kaller dette *refleksivitetsprosessen* etter Lincoln og Cuba. I denne sammenhengen blir ikke det subjektive sett på som et motstykke til det objektive, det at det subjektive skal forkastes til fordel for det objektive. Snarere heller tvert imot. Det subjektive må komme frem, og dermed blir ikke objektivitet det mest formålstjenlige i slike kvalitative studier som denne oppgaven er (Postholm, 2010, s. 128).

I innledningen på oppgaven er det skrevet noe om hvorfor dette prosjektet var viktig å undersøke for meg. Slik sett blir det vanskelig å legge bort min egen forforståelse for problemet. Dette trenger ikke nødvendigvis å være en svakhet, men heller en styrke. Ved å være bevisst på egen subjektivitet, kan en klarere se hvorfor det analyseres og tolkes slik det gjør, og at den kunnskapen som skapes, ofte er relatert til en bestemt virkelighet i et gitt tidsrom.

3.6.4 Transkribering, bearbeiding og analyse av intervjuene

Alle de fire intervjuene som ble gjennomført er transkribert. Dette var et krevende arbeid, siden alle intervjuene varte rundt en times tid. Intervjuene ble transkribert kort tid etter de ble gjennomført. Jeg skrev ned det informantene sa så ordrett som mulig, uten å legge inn noen tolkninger og antagelser. Hver informant ble intervjuet individuelt, anonymisert og tildelt fiktive navn (vedlegg 5).

I analysen av intervjuene som presenteres i kapittel 4 har jeg valgt presentasjonsformen som Thagaard (2016) betegner som *personsentrerte tilnærminger*. Jeg identifiserte interessante utsnitt fra datamaterialet, deretter knyttet jeg kodeord/kategorier (vedlegg 4) til de ulike utsnittene. I tillegg til kodeordene, vurderte jeg datamaterialet og skrev ned ideer, tanker og forslag til tolkning av utsnittene (*memos*). Disse notatene spilte en stor rolle i forståelsen jeg fikk underveis i prosessen, som videre ga meg grunnlaget for de personsentrerte tolkningene som oppsummeres etter hver enkelt informant i resultatdelen (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 101; Thagaard, 2016, s. 158-159).

Det første jeg gjorde var en såkalt *åpen koding* som både Postholm (2010) og Thagaard (2016) skriver om med referanse til Corbin & Strauss (Postholm, 2010, s. 88; Thagaard, 2016, s. 159). Dette er en prosess der forskeren setter navn og kategorier på fenomener som dukker opp gjennom en grundig gjennomgang av datamaterialet. Gjennom den åpne kodingen fikk jeg et overblikk over hele intervjuet, og kontroll på de ulike utsnittene jeg så på som interessante. På denne måten knyttet jeg utsnittene i transkripsjonen til begrepene om prosedyre- og begrepskunnskap. Deretter ble det gjort en *aksial koding*. Da gikk jeg dypere inn i tekstens mening, brukte resultatet av den åpne kodingen, delte denne videre inn i de fire underkategoriene og deres kriterier jeg på forhånd hadde utviklet. Denne prosessen skulle få frem eksempler, egenskaper og forståelse av hva deltagerne hadde gjort og sagt. Det var også i denne fasen at jeg fortløpende skrev ned ideer, tanker og tolkning (memos).

Den tidlige fasen av analyseprosessen er ofte deskriptiv, og det er viktig å få en oversikt og forståelse for sentrale temaer i datamaterialet. I denne fasen blir datamaterialet redusert og strukturert, det vil si delt inn i ulike deler. Begrepene som brukes i denne fasen er ofte erfaringsnære. I denne oppgaven ble det først brukt prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. De erfaringsnære begrepene ble relatert til deltagernes utsagn, som på sin måte understreker den betydningen som forskeren mener at informantene uttrykker. De erfaringsfjerne begrepene er de som forskeren reflekterer over, og som i denne oppgaven representerer selve utgangspunktet i undersøkelsen. I dette tilfellet handler det i stor grad om teoretisk relevante begreper som knyttes til teorien, herunder kategoriseringen og kriterieinndelingen av prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Dermed kan en oppsummere prosessen ved å si at selve analysen besto av en datareduksjon (sammenfatning), og en utvidelse av datamaterialet, der det ble knyttet tolkninger og refleksjoner rundt det underliggende meningsinnholdet. Hovedformålet med analysen og tolkningen var å utvikle en utvidet forståelse av de utsagnene informantene ga, med bakgrunn i det teoretiske rammeverket som oppgaven bygger på. Den tidlige analysen kan regnes som en *dekontekstualisering*, der forskeren deler datamaterialet inn bit for bit og dermed adskilt fra den opprinnelige sammenhengen. Prosessen etterpå kan kalles for en *rekontekstualisering*, der forskeren knytter relevante teoretiske begreper til kategoriene og kriteriene som datamaterialet analyseres ut fra. Under rekontekstualiseringen fant jeg frem til ulike sammenhenger jeg mente dataene representerte, og denne prosessen var påvirket av inntrykkene jeg satt igjen med fra selve datamaterialet (transkriberingen), fra intervjusituasjonen og det teoretiske perspektivet. Thagaard (2016) sier at forskere utvikler en forståelse for fenomenet gjennom det naturlige samspillet mellom datamaterialet, forskerens forforståelse og den faglige forankringen (Thagaard, 2016, s. 161, 167).

For å analysere datamaterialet har jeg utviklet et analyseverktøy, som i all hovedsak bygger på Hiebert og Lefevre (1986) sin kunnskapsinndeling. Innbakt i verktøyet er også Holt (1964) og Krutetskii (1976) og Rachlin (1981) sine kriterier. I tillegg er det innslag av trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). Kriteriene for klassifisering i de ulike kategoriene er etter inspirasjon fra alle teoretikerne som er beskrevet i teorikapittelet.

Analyseverktøyet er presentert i sin helhet i vedlegg 4. Her kan leseren se hvilke kriterier som ligger til grunn for å kunne plassere informantene i de ulike kategoriene. Videre vil det komme en beskrivelse av klassifiseringene som ble brukt under analyseprosessen. Forkortelsene som blir brukt er de samme som leseren kan finne i selve analyseverktøyet. Se for øvrig figur 2 side 59 som illustrerer en forenkling av verktøyet.

I forkortelsen **ARP** ligger det at eleven kan løse oppgaver ved hjelp av algoritmer, regler og prosedyrer som de har lært seg (pugget eller imiterer fra husken), men har liten evne til å forklare hva som blir gjort, eller hvorfor det som blir gjort er riktig. Det må bemerkes at elevene fortsatt kan løse typer av oppgaver ganske raskt og effektivt, for eksempel å gi kommandoer i Geogebra som hjelper dem å tegne grafer, finne skjæringspunkter o.l. Dette betyr imidlertid ikke at de vet hvorfor kommandoen er riktig, eller hva den egentlig gjør. Dette kan sies å være oppskrifter på strategier som eleven har for å løse bestemte typer av oppgaver. I og med at det dreier seg om bestemte typer av oppgaver, er eleven svært avhengig av konteksten. En oppgave, som kontekstmessig faller utenfor det eleven har gjort tidligere, vil eleven trolig ikke klare å løse. Eleven vil med andre ord ha vanskeligheter med å kunne overføre denne kunnskapen og forståelsen videre i andre typer av oppgaver. Ofte ser eleven liten eller ingen sammenheng mellom det man har tegnet eller utført i Geogebra og matematikken som ligger bak. Typisk for elever i denne kategorien er at de, nesten uten unntak, er ukritiske til sine egne svar. Dette kan henge sammen med at de ikke har den faglige tyngden som muliggjør det å være kritisk.

Et annet aspekt ved prosedyrekunnskaper er forkortelsen **<u>MS</u>**, som omhandler det matematiske språket. Elever som kan plasseres i denne kategorien, vil kunne se om noe er riktig satt opp, og de klarer å håndtere symbolske representasjoner. Dette betyr at de overordnet vet hva som skal være med i et stykke for at det skal kunne løses, men at de ikke automatisk vet hvordan de skal klare å utføre beregningen, eller hva det betyr. Elever kan se at $y = 2x + 1$ dreier seg om uttrykket til en rett linje (mentalt bilde), men ha vanskeligheter med å forklare hvorfor. Et annet typisk eksempel her kan være at elevene skal finne grafens skjæringspunkt med x-aksen, og vet at da må de sette $y = 0$. Erfaringsvis klarer mange elever dette, men de vet ikke hvorfor de gjør det. Det har med andre ord bare blitt en prosedyre for akkurat dette problemet.

Begrepskunnskapene deler Hiebert og Lefevre (1986) som tidligere nevnt inn i to typer. Den første, **<u>PN</u>**, dreier seg om kunnskaper på et primært nivå. Her vil eleven klare å gi eksempler som ligger på samme abstraksjonsnivå, og delvis vil eleven kunne generalisere matematikken. Dette tolkes dithen at eleven klarer å generalisere en matematisk sammenheng ved hjelp av det muntlige språket, det vil si å kunne redegjøre overbevisende for en sammenheng ved hjelp av egne ord, men ikke nødvendigvis ved bruk av variabler. På dette nivået er også elevene forholdsvis avhengig av konteksten.

På det reflekterende nivået (**<u>RN</u>**), vil eleven være i stand til å forklare matematiske sammenhenger med egne ord, og vil klare å generalisere sammenhengen. Eleven bruker forståelsen og kunnskapene sine utover en bestemt oppgavetype, og er dermed ikke bundet til en bestemt kontekst. Eleven har det man kan kalle god overføringsevne. En elev i denne kategorien har også evnen til fleksibilitet. I det ligger det at eleven klarer å effektivt og nøyaktig oversette mellom de ulike representasjonene (fra ett perspektiv til et annet), samtidig som tankegangen og forståelsen er reversibel. I tillegg vil denne typen elever ha god innsikt i den matematiske sammenhengen, og dermed klare å reflektere kritisk over sine egne svar. På denne måten vil de være i stand til å se hva som er gjort, eller hva som bør gjøres videre for å komme i mål. Elevene kan i tillegg forutse noen konsekvenser, og gi argumenter for dette. Eksempelvis kan det dreie seg om å se sammenhengen mellom stigningstallet og hvordan grafen oppfører seg i koordinatsystemet. Eleven ser forbindelser mellom begreper og prosedyrer.

3.7 Validitet

Validitet er sterkt bundet til selve tolkningen forskeren gjør av dataene, altså gyldigheten. Dataene som er innsamlet representerer virkeligheten, men det må presiseres at det ikke er selve virkeligheten. Christoffersen & Johannessen (2012) skriver at kvalitativ forskning og validitet handler om spørsmål knyttet til forskerens funn, og om fremgangsmåtene gjenspeiler intensjonen med studien, samt om dette representerer virkeligheten (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 24). Jeg har under tolkningsprosessen av dataene prøvd å gjøre den så transparent som mulig. Det vil si at jeg blant annet har tydeliggjort og begrunnet funnene ved å vise til eksempler fra datagrunnlaget, slik at tolkningene kan dokumenteres. Jeg har også redegjort for hvordan jeg har satt sammen analyseverktøyet og beskrevet de metodiske tilnærmingene grundig.

3.8 Reliabilitet

I forskning er spørsmålet om reliabilitet, det vil si hvor pålitelig eller troverdig resultatet av undersøkelsen er, helt sentralt. Dette handler i stor grad om nøyaktighet i undersøkelsens data, slik som for eksempel hvilke data som brukes, hvordan disse er fremkommet, og hvordan disse bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 23). Reliabilitet handler med andre ord om å kritisk vurdere prosjektet, slik at en kan være rimelig sikker på at andre forskere som bruker de samme metodene, vil komme frem til det samme resultatet (Thagaard, 2016, s. 202).

I kvalitativ forskning, og spesielt i en casestudie som denne, undersøkes det helt spesifikke tilfeller. Derfor er det viktig å tenke over at funnene og resultatene som kommer frem i denne undersøkelsen, er steds- og tidsbetinget (Postholm, 2010, s. 131). Dette gjør at det for andre forskere kan være krevende å gjenta den samme undersøkelsen eksakt, med de samme rammefaktorene og betingelsene som ligger til grunn. Blant annet kan dette knyttes opp mot bruken av Geogebra i undervisningen og hvordan faglærer legger opp til differensiert undervisning med tanke på dette. Andre faktorer er tidspunktet undersøkelsen ble gjennomført på. Elevene hadde hatt 14 dager med juleferie i forkant av datainnsamlingen. I tillegg hadde de rett før jul startet med statistikk, som på sin måte har lite til felles med lineære funksjoner. Man kan altså risikere at elevene var i et annet modus enn det de burde vært.

Thagaard (2016) beskriver reliabilitet som en direkte referanse til *repliserbarhet*. Dermed dukker det opp et vesentlig spørsmål om en slik kvalitativ studie som dette har repliserbarhet som et nødvendig kriterium. Repliserbarhet har direkte røtter til en positivistisk forskningslogikk, der nøytralitet er et essensielt forskningsideal. Siden jeg i dette prosjektet har etablert et relativt nært og godt forhold til forskningsdeltagerne, blir nøytraliteten visket noe ut. Dette betyr at selve idealet, at forskeren skal oppfattes som uavhengig i relasjonen til deltagerne, ikke er holdbar i en slik kvalitativ undersøkelse som denne. Ut fra en alternativ forskningslogikk som tar utgangspunkt i et konstruktivistisk syn, vil det være naturlig å se på de kvalitative dataene som fremkommer som et samarbeid mellom forskeren og deltagerne, og dermed blir spørsmålet om repliserbarhet ikke relevant (Thagaard, 2016, s. 202).

Under arbeidet med denne oppgaven gjorde jeg noen tiltak for å sikre reliabiliteten. Siden informantene ikke er tilstede når analysen og tolkningen skjer, har forskeren mer innflytelse på denne fasen enn selve datainnsamlingsfasen (Thagaard, 2016, s. 214). For å sikre seg at det man har analysert og tolket er riktig, kan man få informantene til å lese gjennom beskrivelsene og se om de kjenner seg igjen. Postholm (2010) kaller dette for *member checking* (Postholm, 2010, s. 132). Informantene fikk kommentere hvorvidt de kjente seg igjen i beskrivelser og tolkninger fra resultatdelen. De fikk også muligheten til å bemerke faktafeil, eller om de var uenige i tolkninger som var gjort. Alle de fire informantene sa seg enig i beskrivelsene og tolkningene. Dette er med på å styrke troverdigheten.

I tillegg er forskningsprosessen og forskningsmetodene, slik de er beskrevet i metodedelen transparente. Jeg har valgt å ha en lengre metodedel for å synliggjøre og beskrive viktige aspekter ved selve prosessen. Det skal dermed være mulig for andre forskere å gå prosjektet etter i sømmene.

3.9 Generaliserbarhet (overførbarhet)

Overførbarhet handler om spørsmål som knytter seg til tolkninger og forståelse av en enkelt undersøkelse kan overføres til å gjelde og være relevante i andre sammenhenger. Spesielt i kvalitative studier der utvalget er valgt ut på grunn av hensiktsmessighet vil det nesten være selvsagt at utvalgene ikke er representative for en hel populasjon. (Thagaard, 2016, s. 23,64,194). Denne casestudien fokuserer på fire enkeltelever, og er tids- og stedsavgrenset. Dermed er det rimelig å anta at det er for få informanter til å dra noen generelle konklusjoner fra prosjektet. Allikevel kan lesere som har erfaring fra området fra før, eller lang fartstid fra læreryrket, gjenkjenne flere av funnene, og støtte disse. Slik sett kan kunnskapen som blir tydeliggjort bevisstgjøre lesere om hva som kan være nyttig å ha fokus på i matematikkundervisningen rundt lineære funksjoner. Derfor er det riktigere å heller snakke om overføring av kunnskap enn en generalisering. (Postholm, 2010, s. 131; Thagaard, 2016, s. 213-214).

3.10 Etiske overveielser

Forskningsprosesser preges hele tiden av etiske overveielser, både før, under og etter datainnsamlingen. Forskere må følge konkrete etiske retningslinjer som blant annet sikrer personvernet til de som deltar i studiet, og man må alltid være bevisst på hvilke regler og normer som gjelder. Denne studien innebar undersøkelser av menneskelige forhold, og blant annet ble det gjennomført video- og lydopptak. Hver informant er et unikt individ som har krav på å bli møtt med respekt og verdighet. I tillegg må de forvente at deres anonymitet blir ivaretatt, slik at det som fremkommer ikke kan spores tilbake via navn, personkarakteristikker eller lignende. Informantene er informert om at prosjektet er meldt til

Norsk senter for forskningsdata (NSD) og fått godkjenning (vedlegg 2). I tillegg er det innhentet tillatelse fra skolens ledelse. Prosjektet er gjennomført i henhold til gjeldende lover og regler for etiske krav (De nasjonale forskningsetiske komiteer, 2016, s. 9-22).

Denne undersøkelsen involverte flere typer av elever, noen sterke og noen svake. I den forbindelse var det viktig at de svakeste ikke ble stigmatisert, at det ikke ble belastende for dem. Det ble tydeliggjort at dette ikke skulle være en ny vurderingssituasjon i faget, men at de skulle bidra til å kaste lys over et problem som var viktig for meg å finne ut noe om.

For å dokumentere god forskningsetikk er de blitt informert, og det ble levert ut en skriftlig informert samtykkeerklæring (vedlegg 1). Der ble de blant annet opplyst om prosjektets hensikt og hva de sa ja til. Av skrivet kom det tydelig frem at de når som helst, uten begrunnelse, kunne trekke sin deltagelse. Alle informantene skrev under på denne samtykkeerklæringen, og har godtatt å stille opp under de gitte forutsetningene. Informantene har fått fiktive navn i presentasjonen, og skolen er anonymisert. De er videre kjent med at lyd- og videopptak, samt transkriberingen, vil bli slettet og makulert ved prosjektets slutt.

I en studie som denne der resultatdelen har en personsentrert tilnærming, vil anonymitet representere ett mulig problem. Her vil informasjonen fra hver enkelt informant bli mer fremtredende enn der fremstillingen representerer en gruppe eller lignende. Derfor er det viktig at deltagerne anonymiseres tidlig i prosessen, herunder også sted (skolen). Stort sett fokuserer resultatdelen i denne oppgaven på selve innholdet i datamaterialet, og dermed er det lagt mindre vekt på informasjon som kan stå i fare for å identifisere enkeltpersoner (Thagaard, 2016, s. 178-179).

Vitenskapelig redelighet er et annet viktig aspekt. Dette innebærer at man skal unngå å plagiere andres tekster. Plagiering regnes som et alvorlig brudd på etiske standarder. De nasjonale forskningsetiske komiteer (NESH, 2016) definerer plagiat som: «Plagiat i forskningsetisk forstand er å ta noe fra andre og presentere det som sitt eget uten god henvisning til kildene» (De nasjonale forskningsetiske komiteer, 2016, s. 28). Med bakgrunn i dette har jeg vært opptatt av å ha god henvisningsskikk, og dermed gi mest mulig nøyaktige henvisninger til den litteraturen jeg har brukt (forfatter, årstall og sidetall). Jeg har i tillegg vært oppmerksom på det som omhandler fabrikkering og forfalskning av data (Ruyter, 2003, s. 185-188). Intervjuene ble transkribert så ordrett som mulig, funn og tolkninger er dokumentert ut fra dataene. Informantene har i tillegg lest gjennom resultat- og analysedelen for å bekrefte dette. Da de leste dette gjorde jeg de oppmerksomme på at det de leste kunne oppfattes som fremmedgjørende og provoserende. Jeg begrunnet det med at analyse og tolkning handler om å ta sekvenser av datamaterialet ut av sammenhengen, og sette disse inn i andre sammenhenger som ikke er kjent for informantene. De er ikke kjent med det teoretiske rammeverket, og slik sett ikke i stand til å sette seg inn i dekontekstualiseringen som er gjort.

3.11 Kommentarer til metoden - metodekritikk

Det er god støtte i litteraturen fra metodekapittelet om at intervju kanskje er den viktigste metoden for å innhente data i kvalitative studier, spesielt casestudier. Hvis man ikke får tak i det man ønsker med en gang, kan man omformulere spørsmålet og man kan få belyst andre sider av samme sak. Jeg opplevde at det var vanskelig å ha 100% fokus under hele intervjuet. Siden jeg er uerfaren som forsker, ser jeg i ettertid at det ville vært en fordel å være to forskere - både under intervju- og tolkningsprosessen.

Som uerfaren intervjuer er det også fare for intervjufeil. Noen slike feil kan være at: (1) forskerens holdninger til temaet kommer tydelig frem, (2) at det stilles ledende uhensiktsmessige spørsmål slik at man får de ønskede svarene, (3) at forskeren eller intervjuobjektet har lav motivasjon (Halvorsen, 2008, s. 138).

Ærlige svar kan en i langt større grad forvente i kvantitative undersøkelser. Her er deltagerne distansert fra forskeren og de er anonyme. I slike studier vil man derimot ikke klare å fange opp eventuelle misforståelser, og det vil være mye enklere å hoppe over spørsmål. I kvalitativ forskning vil man ha mulighet til å avklare misforståelser, og det er ikke like lett å la være å svare på spørsmål.

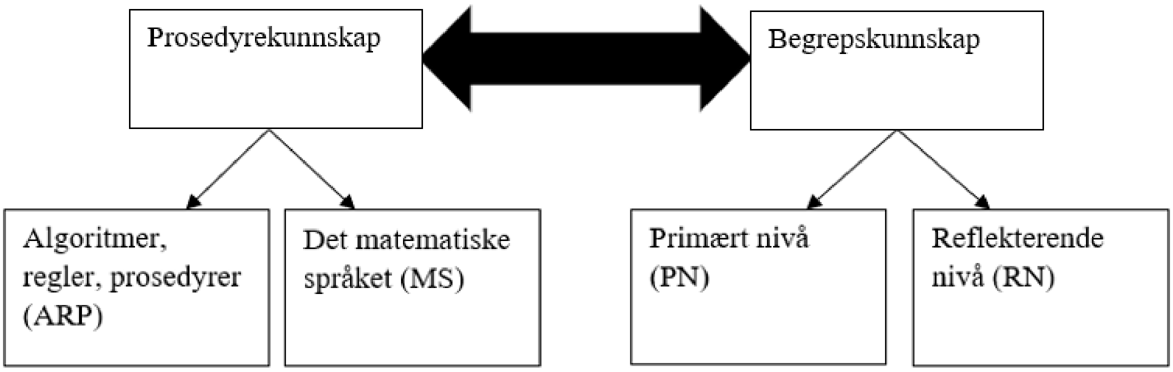
Det er flere steder i metodedelen diskutert forskerens rolle, som også kan knyttes opp mot en metodekritikk.

3.12 Kommentarer til kildebruk

Kildekritikk er viktig, spesielt siden alt er lett tilgjengelig via internett. Informasjonen som finnes her kan være alt fra god til helt ubrukelig. I denne oppgaven har jeg stort sett hentet litteratur fra anbefalte databaser gjennom høgskolens bibliotekside, og litteratur som er brukt i ulike kurs i dette masterstudiet. Disse antar jeg holder høy faglig kvalitet, og de fleste av disse er fagfellevurdert. Noe av litteraturen er også hentet fra andre masteroppgaver og doktorgradsavhandlinger. I all hovedsak har jeg lest primærlitteraturen, mens i doktorgradsavhandlingen til Teachey (2003) var ikke all litteraturen tilgjengelig. Jeg har derfor antatt at det som kommer frem i avhandlingen i form av litteraturoversikt og tolkninger likevel har høy kvalitet. Særlig gjelder dette referansene fra Krutetskii (1976) og Rachlin (1981), der jeg ikke klarte å finne frem til primærkilden. Jeg har heller ikke lykkes i å finne den oversatte versjonen av Krutetskii (1976), gjort av Joan Teller. I tillegg viser litteraturlisten i doktorgradsavhandlingen til Teachey (2003) at Rachlin (1981) er en upublisert avhandling. På tross av dette sier databasen (EBSCOhost) på Høgskolens bibliotekside at denne er publisert, men ikke tilgjengelig.

4. Resultater, funn og analyse av data

I dette kapittelet vil det presenteres resultater, funn og analyse av det datamaterialet som er samlet inn. Kapittelet er bygd opp slik at elevene presenteres hver for seg, og eksempler fra intervjuet som underbygger funn er selve grunnlaget for analysen. Analysen og kodingen tar utgangspunkt i analyseverktøyet som er presentert tidligere. De overordnede faktorene jeg så etter, kan raskt oppsummeres i figur 2. Det vil være viktig å ha dette i tankene gjennom resten av presentasjonen.



Figur 2: *En forenkling av analyseskjemaet*

4.1 Resultater og analyse – elev for elev

Gjennom prosessen ble det prøvd flere varianter for å presentere resultatene og analysen. Den første varianten var å presentere oppgave for oppgave med tilhørende interessante funn og oppdagelser fra hver av de fire informantene. Dette ble svært omfattende og mange sider med tekst, og til dels uoversiktlig å navigere i. Den andre varianten var å ta utgangspunkt i de fire underkategoriene fra analyseskjemaet, og se etter funn og resultater ved å finne gode eksempler på hver kategori gjennom intervjuene. Gjennom å benytte denne varianten ble elevperspektivet borte i oppgaven. Det føltes som om det ble mer fokus på kategoriene, og siden problemstillingen indikerer et elevperspektiv: «*Hvordan viser elever kunnskaper om lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?*», ble det viktig å holde på elevfokuset. Dette er hovedgrunnen til at resultatene videre presenteres ved å ta utgangspunkt i hver enkelt elev. Dette ga også mulighet til å ta alle de seks oppgavene i betraktning, uten at omfanget av resultatdelen tok for mye plass. Med andre ord er resultatene presentert i den formen som Thagaard (2016) beskriver som *personsentrerte tilnærminger* (Thagaard, 2016, s. 157-158).

I intervjuet ble stort sett det første spørsmålet for hver oppgave slik som: «Hvordan har du tenkt her?», «Forklar hvordan du startet her, bruk egne ord». Tanken bak det var at informantene skulle starte med blanke ark, uten å være påvirket av hva jeg ville frem til. Det var viktig at de fikk starte slik de mente var riktig, og i tillegg gav dette dem muligheten til å ta en akseptert tenkepause før de satte i gang med forklaringene sine. Resten av intervjuet fortonet seg slik at informantene i størst mulig grad skulle forklare og redegjøre for hvordan de hadde løst oppgavene.

4.1.1 Max

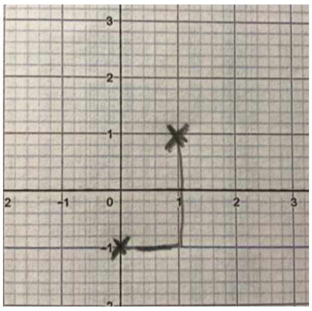
I oppgave 1 viste Max at han behersket Geogebra godt, og fikk frem alle de tre grafene på under 40 sekunder. Han tastet effektivt inn kommandoene i Geogebra, og det er et tydelig tegn at han har det som tidligere i oppgaven er definert som prosedyrekunnskaper (ARP). Noe som forsterket denne antagelsen var at han under intervjuet ikke umiddelbart klarte å forklare hva funksjonsuttrykkene betydde, og han blandet sammen begrepene stigningstall og konstantledd. Det kan dermed se ut som om Max på dette tidspunktet ikke hadde klare begrepskunnskaper rundt oppgaven. Da han ble presentert for det han selv hadde tegnet, og på nytt ble spurt om å forklare formelen, kom det imidlertid en tydelig, klar og overbevisende sammenheng mellom disse.

> L:[…], men hvis du ser på denne ($y = x + 1$), kan du på en enkelt måte se at stigningstallet til denne er 1?
> M: Fordi den går en rute bort og en oppover (peker på grafen, og viser det riktig), og dette gjentar seg oppover hele grafen – for hver den går en bortover, så går den en oppover. Hvis stigningstallet er 2, slik som i den andre, kan man tenke seg at en går en ut og to oppover. Og jo høyere tall [større positive tall] går grafen mer oppover [brattere], og er stigningstallet negativt vil grafen synke – altså den vil gå nedover

Det viste seg dermed at da Max ble presentert de to forskjellige representasjonsformene, i dette tilfellet formelen og grafen, klarte han å se den iboende sammenhengen mellom dem. Da han kun hadde formelen var det vanskelig å forklare noe om grafen i koordinatsystemet. Når dette er tatt i betraktning, er det ingen tvil om at han vet hva som menes med stigningstall, og dette kan likevel indikere begrepskunnskaper. Han forklarer med egne ord at grafene han har tegnet i Geogebra stemmer overens med funksjonsuttrykkene, også når det gjelder konstantleddene (PN/RN). Utdraget over viser også at han kan generalisere begrepet stigningstall ved hjelp av det muntlige språket. I utdraget under er det også klare momenter som støtter antagelsene om begrepskunnskaper. Her kan man tydelig se at han generaliserte betydningen av konstantleddet. En slik type generalisering, som ikke bare er repetisjon av andre lineære grafers konstantledd, viser begrepskunnskaper som kan plasseres på det reflekterende nivået (RN).

> M: Ja konstantleddet er jo hele tiden konstant, så det spørs hva du endrer det til. Hvis det blir større vil grafen krysse y-aksen lengre opp, og hvis det blir mindre vil grafen krysse y-aksen lengre ned. Stigningstallet vil ikke endre seg selv om konstantleddet endrer seg.

Alt i alt er dette med på å støtte opp under tolkningen om at Max kan konvertere og se sammenhengen mellom representasjonsformene formel og graf. Max viser også dette ved å tegne og forklare funksjonen $y = -1 + 2x$ på ark (figur 3).



Figur 3: *Max illustrerer overgangen fra formel til graf*

Det som umiddelbart så ut til å være prosedyrekunnskap, utviklet seg under intervjuet til å bli begrepskunnskap av hva som ligger i konseptene stigningstall og konstantledd.

Allikevel viste det seg at han manglet noe av den gode selvstendige fleksibiliteten i forhold til representasjonene, spesielt da han skulle gå fra graf til formel. Etter en påminnelse om stigningstall og konstantledd, fikk han på et vis frem funksjonsuttrykket. Et eksempel på dette er fra oppgave 3.

> L: […] ser du hva funksjonsuttrykket må være?
> M: Ahh…si det…mmm…(pause, 10 sek)…
> L: Da kan det nok være lurt å tenke tilbake på det med stigningstall og konstantledd.
> M: M-m (bekreftende)…konstantleddet er jo 2, og stigningstallet er...vent litt…jo det er en. Så da må uttrykket bli…vent litt…jeg må tenke litt i huggu først…jo det blir…for stigningstallet var 2…nei…det var 1 det og konstantleddet var 2…så da blir det vel $2 + 1x$, eller $x + 2$ da.

Som teksten over indikerer, viser det seg at når flere representasjoner vises samtidig, er dette med på å forsterke og klargjøre sammenhengen mellom representasjonene, og på denne måten gjøre det tydeligere og mer visuelt for elevene.

Max klarte flere ganger gjennom intervjuet og samtalen vi hadde, å gjenkalle tidligere innlært kunnskap. Dette er ett av poengene til Skemp (1976) sett opp mot det å ha en relasjonell forståelse (Skemp,1976, s. 8-10). I lys av den matematiske kompetansen, slik den beskrives hos Kilpatrick et al. (2001), støttes nettopp disse antagelsene som Skemps utviklet (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

Utover i intervjuet viste Max gode begrepskunnskaper, spesielt på oppgave 4. Her brukte han kunnskap om stigningstall og konstantledd utover den konteksten fra de tradisjonelle og mekaniske oppgavene. Han har med andre ord en god evne til å overføre, og forklarte sammenhengen i oppgaven godt med egne ord (RN). Han så tydelig forbindelsene mellom begrepene og selve prosedyren han tastet inn i Geogebra, og kunne forklare hvorfor grafen og formelen stemte overens. I oppgaveløsningen brukte han prosedyrer (ARP), spesielt i oppgave 4b, men i intervjuet kom det frem bakenforliggende kunnskaper som plasserer han på det reflekterende nivået. Dette støttes videre i oppgaven ved at han drar inn tidligere temaer (likninger), og ser disse i en sammenheng med nåværende tema. Dette kan eksemplifiseres ved at Max ble spurt om hvor mange elever det ville vært på julebordet dersom den totale kostnaden var på 16000 kroner, noe som egentlig var utenfor oppgaven. Ved å løse likningen $150x + 500 = 16000$ kom han frem til at det ville være litt mer enn 100 elever (≈ 103). Han argumenterte også for at dersom det kostet 8000 kroner for 50 elever, og prisen for 100 elever skulle være 16000 kroner, måtte grafen ha skjært y-aksen i 0 (i punktet 0,0). Han evnet dermed å forutse noen konsekvenser på generelt grunnlag, selv om han unnlot å si noe om hvordan stigningstallet villet forandret seg. Allikevel er dette refleksjoner som støtter og bekrefter RN-plasseringen, fordi Max ser noe mer utover det som oppgaven spør etter. I tillegg viste også Max noe kritisk refleksjon, ved at han gikk tilbake, dobbeltkontrollerte at grafen og formelen stemte overens, og at svaret for 50 russ stemte både med grafen og med utregningene han hadde gjort.

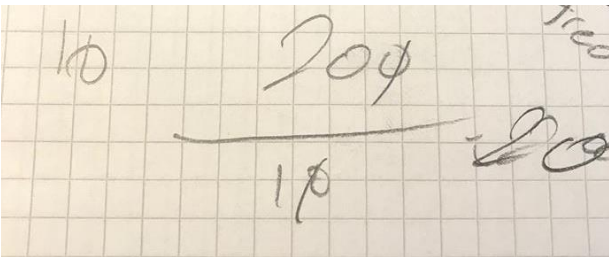
Eksempelet fra oppgave 4b viser at elever som befinner seg på et begrepskunnskapsnivå også bruker algoritmer, regler og prosedyrer for å løse oppgaver. Flere steder i intervjuet ga Max uttrykk for å bruke ARP. På spørsmål klarte han likevel å svare på de matematiske sammenhengene, og generelt matematikken som lå bak. Dette viste også Isak i sine betraktninger rundt flere av oppgavene (se neste delkapittel). Denne observasjonen støttes også av Hiebert & Lefevre (1986) i det de sier at prosedyrekunnskaper forsterker begrepskunnskaper, ved blant annet å redusere det kognitive arbeidet (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 14-16).

I oppgave 5 viser Max at han bruker noen representasjoner ubevisst. Her prøver han å sette inn noen verdier som representerer antall kjørte mil, får ut noen y-verdier, og bruker disse til å forklare hvordan han ville tegnet grafen dersom han ikke hadde hatt Geogebra tilgjengelig. Han tenkte ikke på det han gjorde som en verditabell. Det er også funn fra Anna som kan tyde på at dette er en type strategi elever kan bruke. Janvier (1978) bekrefter denne strategien i doktoravhandlingen sin. Han kaller det for indirekte oversettelse (Janvier, 1978, s. 3.3). I løpet av oppgave 5 får han igjen vist kunnskaper på et reflekterende nivå, gjennom å bruke egne ord på å forklare sammenhengene mellom opplysningene i oppgaven. Han viste tydelig at han kunne oversette mellom representasjonene situasjon og graf, selv om dette gikk via en tabell. Max gjorde i tillegg betraktninger rundt selve grafen, og hvilke x- og y-verdier som var interessante for oppgaven. Vel og merke måtte han bli satt på sporet av det, men han reflekterte godt rundt det (RN).

M: Ja de negative er ikke så interessante…så det er kun de positive verdiene…
L: Alle de positive?
M: (pause, 2 sek) Ehh…fra null…og opp til 60…jo opp til 60, fordi tanken rommer maksimalt 60 liter, så det er ikke vits i å se på noe høyere enn det…
L: Hva med x-verdiene da?
M: Ja da…det må vel være de fra 0 da og til og med 120. Etter 120 så er jo tanken tom.

Oppgave 6 fortonet seg omtrent likt med oppgave 5. Han hadde gode refleksjoner omkring informasjonen i oppgaven, og viste tydelig sammenhengen mellom matematikken. Han brukte informasjonen til å beregne de ulike stigningstallene i de to bedriftenes utslipp (RN).

L: Vi starter å se filmen som du har lagret, og her ser du at du skriver inn uttrykket $U(x) = 260 - 20x$. Hvordan kom du frem til det?
M: Det jeg gjorde da var å ta 260…som det står her at en bedrift skal reduserer et utslipp jevnt fra 260 tonn til 60 tonn i løpet av 10 år, det betyr jo at den skal synke med 200 tonn på de ti årene, og derfor tok jeg 200 delt på 10 (dette har han vist ved å regne ut, figur 4). Da finner jeg hvor mye det skal synke med pr år, siden det står at utslippet skal reduseres jevnt i oppgaven. Jeg delte først på 5, men det var noe som skurra så jeg skjønte at det måtte være 10, for årene som hadde gått.



Figur 4: *Max viser hvordan han fant stigningstallet*

Riktignok har han ikke tatt med i utregningen at stigningstallet er negativt, men samtalen bekreftet at han skjønte at dette var negativt, noe også grafen fra Geogebra bekreftet. Han fortalte også at det var deler av utregningen som skurret underveis, blant annet at han delte på 5 slik utdraget over viser, og han gjorde noe lignende for den andre bedriften. For den andre bedriften fikk han at utslippet var null tonn etter fem år, og ifølge opplysningene i oppgaven skulle da utslippet være 200 tonn. Dette viser at han ikke tar alle svarene han får for gitt, men stiller seg kritisk til dem (RN). Det samme funnet er gjort hos Isak.

Et annet tydelig funn, som også får støtte hos både Anna og Julia, er at de oppgavene som er virkelighetsnære, ofte virker enklere å løse. Mye kan tyde på at disse er mer intuitive, og det er mer opplagt hvordan man skal benytte seg av begrepene stigningstall og konstantledd, kontra de mer standardiserte og tradisjonelle introduksjonsoppgavene (jf. oppgave 1-3). Dette kan begrunnes med hvordan de forklarte sammenhengen i oppgaven, og hvordan disse oppgavene innbød til å tenke praktisk. Eksemplet under er hentet fra oppgave 4 (julebordoppgaven):

> M: Ja. Det første jeg tenkte var at det var 150 kr per person å gå inn, og vi visste ikke hvor mange som kom, som jeg da skrev som $150x$. Men så var de 500 kronene jeg brukte først da, fordi jeg misforsto jo litt først da…med tanke på om vi skulle vite om hvor mye de gikk i pluss eller om hvor mye penger det var i spill. Så derfor satte jeg -500 kroner først fordi da hadde vi fått svar på hva inntektene av festen var, eller hvor mye de gikk i overskudd da.
> L: Ja men det er innafor det, fordi det viser litt variasjoner og hvordan man tolker oppgaveteksten og det som står der.
> M: Men så kom jeg på at man måtte legge til de 500 kronene, fordi det var jo hvor mye festen koster totalt som kanskje var det det ble spurt etter. Så hvis jeg skal forklare med de begrepene vi har brukt tidligere, så er jo 150 stigningstallet og 500 konstantleddet.

Hiebert & Lefevre (1986) poengterte at begrepskunnskaper måtte læres meningsfullt, og det ser ut til at meningsfulle kontekster forsterker begrepskunnskapene for Max.

Oppsummering fra intervjuet med Max – hovedfunn fra analysen

Alt i alt er det indikasjoner som tyder på at Max har gode begrepskunnskaper på mye av det han ble satt til å løse. Han mestrer bruken av Geogebra på en god måte. I starten av intervjuet er inntrykket at kommandoer og prosedyrer har en viss overvekt, noe som viste seg å bli avkreftet under intervjuet. Han viste etter hvert kunnskaper som kan betraktes som begrepskunnskaper, og brukte prosedyrer, i form av kommandoer i Geogebra, på en hensiktsmessig måte. Han forklarte de matematiske sammenhengene som lå bak prosedyrene, og forklarte blant annet hvorfor graf og formel, eller situasjon og formel stemte overens. Et stykke ut i intervjuet viste også Max at han forsto sammenhengen mellom flere av representasjonene, og spesielt ble dette tydelig da han i tillegg visuelt så det han hadde tegnet i Geogebra. Ut fra dette kan Geogebra se ut til å være et godt hjelpemiddel til å se og visualisere sammenhengen mellom flere av representasjonene. Dermed viser han at i tillegg til å oversette mellom representasjonene, ser han også sammenhengen mellom dem slik både Even (1998) og Ronda (2015) påpeker.

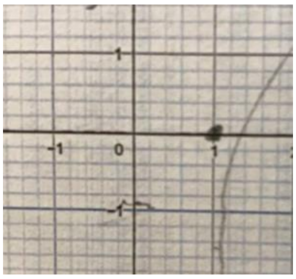
Ut fra analysen er det tegn på at han vekslet mellom prosedyre- og begrepskunnskaper, slik Hiebert & Lefevre (1986) antok at sammenhengen var. Analysen støtter også funn som er gjort for flere av informantene i forbindelse med det Janvier (1978) omtalte som indirekte oversettelser. For å komme fra en representasjon til en annen brukes et «mellomstopp». Max viste kritisk sans ved å vurdere svarene sine, og det er rimelig å anta at han ser en del forbindelser mellom begreper og prosedyrer. Samtidig gir dette mulighet til å overvåke egne prosedyrer. Dette gjør han videre i stand til å argumentere hvorfor det ene er en konsekvens av det andre, slik Kilpatrick et al. (2001) beskriver det (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120). Han viste generelt god overføringsevne, forklarte flere sammenhenger med egne ord og dro inn tidligere temaer (likninger) for så å se disse i lys av det nye temaet. Til slutt kan det også nevnes at de virkelighetsnære oppgavene gjorde det tilsynelatende enklere å se koblingen mellom situasjon, formel og graf, og han brukte begrepskunnskapene (via forklaringer) enda tydeligere. Dette samsvarer godt med det Hiebert & Lefevre (1986) sa om at begrepskunnskap må tilegnes meningsfullt.

4.1.2 Isak

I likhet med Max, behersker Isak oppgave 1 gjennom Geogebra perfekt, og gjør seg ferdig med den oppgaven i løpet av 26 sekunder (ARP). Det finnes også faktorer som peker i retning av at Isak i tillegg har mer kunnskap utover disse prosedyrekunnskapene. Åpningsdialogen fra intervjuet var relatert til begreper som stigningstall og konstantledd, selv om de ikke eksplisitt kom frem i samtalen:

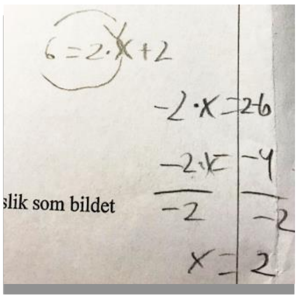
> I: Nei det er jo egentlig det at for hver x du går ut, så går det en opp da, og den starter jo på pluss 1…gjør den ikke det? (viser til $y = x + 1$)
> L: Jo, det er riktig det. Men hva betyr det, hvis du eksempelvis tar den andre likningen der ($y = 2x - 2$)?
> I: Da går den vel to oppover hver gang, men den starter nede på minus 2.
> L: Ja. Slike oppgaver er som regel for hånd, og hvordan hadde du tenkt dersom du fikk den andre funksjonen her, og skulle tegne den for hånd? (Isak får papir å tegne på)
> I: Vi vet at den skal skjære y-aksen i -2, så da kan vi lage et punkt der, også vet vi at den skal gå 2 opp, så da går vi en bort og to oppover, og da blir punktet her (se figur 5).

Som utdraget over viser, bruker Isak egne ord. Han forklarer og viser tydelig sammenhengen mellom grafene og formlene, noe som tyder på en god fleksibilitet på det han gjør (RN). Han kan gå begge veier, reversere tankegangen og forklare hvorfor grafene i Geogebra er riktige. Isak foretar også en muntlig generalisering, ved å forklare at dersom stigningstallet ikke er helt, men for eksempel 1,5, kan man gå to enheter bortover på x-aksen, og gå 3 oppover på y-aksen. Han beskrev at han da fikk et mer solid punkt. Dette utsagnet forsterker antagelsene om at store deler av begrepskunnskapene er på plass mellom disse to representasjonsformene (formel→graf). I forlengelsen av dette ble han presentert for en verditabell, og at dette er en annen representasjonsform for funksjoner. Det viste seg at dette var en representasjonsform han aldri hadde brukt, og han begrunnet det ut fra at oppgavene de hadde løst så langt i matematikk ikke hadde vært kompliserte nok til å bruke denne. Han så imidlertid nytteverdien av dette dersom man for hånd skulle tegne en polynomfunksjon, noe han tydelig presiserte mot slutten av intervjuet. Dette bekrefter igjen overføringsevnen Isak besitter, og han ser forbindelsene mellom begreper og prosedyrer.



Figur 5*: Isak støtter forklaringen sin ved å skissere grafen*

I oppgave 2a viser Isak at han bruker sin prosedyrekunnskap (ARP) til å løse oppgaven i Geogebra. Han ble under intervjuet utfordret til å regne ut det samme, og kom raskt med at dette kunne løses som en likning. Her overfører han kunnskap fra et tidligere emne inn i et nytt tema og en annen kontekst (se figur 6). Dette tolkes som en kontekstuavhengighet, og dermed kan han plasseres på det reflekterende nivået (RN) i analyseskjemaet.



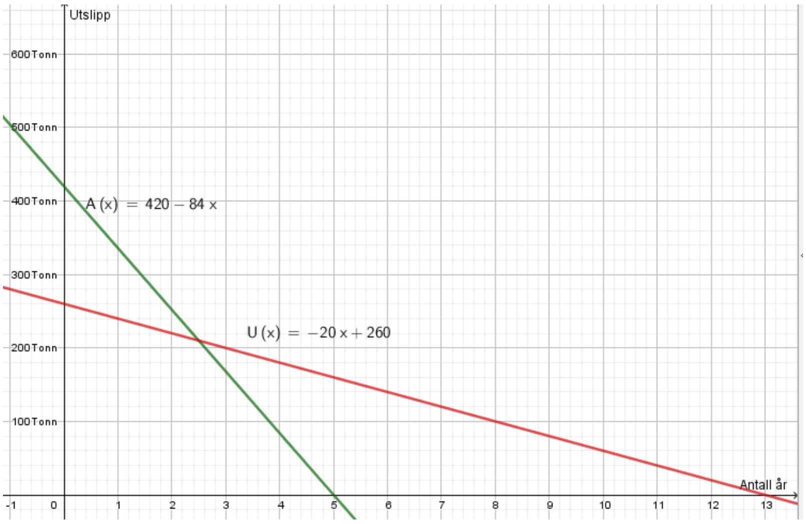
Figur 6: *Isak viser overførbarhet mellom ulike temaer*

Gjennom å bruke Geogebra, uttrykker Isak at dette er forenklende, raskere og dermed tidsbesparende, mer effektivt og nøyaktig. Dette er et funn som viser at også de elevene som besitter begrepskunnskaper bruker regler og prosedyrer (ARP) som løsningsstrategi på oppgaver. Dette støttes flere steder under intervjuet. Forskjellen mellom elever som har begrepskunnskap og de som bare har prosedyrekunnskap, er at Isak i dette tilfellet, kjenner til den bakenforliggende matematikken. Han kan uoppfordret og stødig forklare de matematiske sammenhengene som faktisk er tilstede. I oppgave 4 viser han også tegn på det reflekterende nivået, ved å forklare grundig med egne ord hva opplysningen i teksten betydde, og hvordan han brukte disse til å komme frem til det endelige funksjonsuttrykket. Han viste evnen til å reversere tankegangen sin, ved å generalisere, riktignok uten bruk av variabler, men på en overbevisende måte. Det finnes indikasjoner på at han er god til å stille seg kritisk til egne svar, både i denne oppgaven og spesielt oppgave 6. Under kommer to eksempler som viser dette.

Eksempel fra oppgave 4. Dette er en videreføring av oppgave 4, ved å utfordre han til å si noe om antall russ dersom den totale kostnaden var på 16000 kroner (ikke 8000 kr for 50 russ, slik oppgaven vil frem til):

> L: Hvis vi snur litt på det, og tenker at den totale kostnaden var 16000 kroner, og vi var interessert i å finne ut antall russ på festen. Hvordan skal vi finne ut det?
> I: Da må vi få linjen til å gå nedover da…må vi ikke det? Eller nei…?
> L: Nei vi kan egentlig bruke den samme, bare at…(avbrutt)
> I: Ja da kan vi jo skrive at y=16000 da, og finne skjæringen mellom de to linjene…
> L: Okey, og hvor mange personer tenker du umiddelbart at det måtte være?
> I: 100…fordi det er 8000 og det er dobbelt så mye, og dobbelt så mye økning der, blir dobbelt så mye økning der (peker henholdsvis på y- og x-aksen).
> I: Nei vent litt, det blir litt mer (mener mer enn 100)
> L: Ja det gjør det jammen, og hvorfor blir det litt mer?
> I: (ler)…er det på grunn av de 500 kronene?

Det neste eksempelet er hentet fra oppgave 6, da han skulle tegne grafen fra de to utslippene i samme koordinatsystem. Den første ($U(x) = -20x + 260$) hadde han tegnet fra før, og skulle nå tegne den andre. Han fikk frem en funksjon som han umiddelbart reagerte på. Denne bedriften skulle redusere utslippet fra 420 tonn til 200 tonn på 5 år. Grafen hans viste at bedriften hadde et null-utslipp etter 5 år.



Figur 7: *Et utklipp fra grafen til Isak, der han umiddelbart så at den grønne grafen ikke kunne stemme*

I: (Viser på filmen, se figur 7) Her styrer jeg…for her fikk jeg -84 som stigningstall…jeg glemte å fjerne 200
L: Hva mener du?
I: Jo de skulle jo ned på 200 tonn, så når jeg tok 420 delt på 5 så får jeg jo helt feil…det blir helt feil…for her går det jo i null etter 5 år, og det er ikke riktig…
L: Så her var du litt kritisk igjen da?
I: Ja, jeg var ikke det i starten, men jeg så jo på grafen og de linjene når jeg hadde fått de inn etter hvert at det var noe rart.
L: Det er fint det altså, at du revurderer svarene og går tilbake for å finne ut av ting. Bra.
I: Jeg gjorde jo også noe annet småplukk før jeg kom frem til det riktige, fordi jeg fikk 420 - 200 til å bli 120, og når jeg delte det på 5 fikk jeg det heller ikke til å stemme…fordi da fikk jeg 24, og det skjønte jeg ble for liten nedgang i forhold til den første bedriften…så da går jeg igjennom svarene mine og får det jeg endte opp med da…

I utdraget over reflekterer Isak over hva som er gjort, og hva som bør gjøres videre. På denne måten fant han ut at svaret ikke kunne stemme, spesielt da han så på grafen som kom frem i Geogebra (figur 7). I tillegg forklarte han hvordan han tenkte da han skulle finne stigningstallet, og reflekterte litt rundt hvorfor det han først fikk var feil. Vel og merke sa han ikke eksplisitt at man tar endringen på y-aksen delt på endring på x-aksen. Måten det ble forklart på, tydeliggjorde at det var denne metoden han benyttet seg av (RN).

Som et avsluttende eksempel, og enda en indikator på det reflekterende nivået, kan hans tanker rundt det å avgrense funksjonen i oppgave 5 nevnes. Han var også den eneste av informantene som i forkant av intervjuet hadde gjort seg noen tanker rundt dette.

L:[…] Du startet nemlig med å bruke kommandoen: «Funksjon(Funksjon, start, slutt)».Hva var tanken bak det?
I: Jeg ville at den skulle starte på 60 fordi drivstofftanken kan ikke bli fullere enn 60 liter, også kan den ikke bli mer tom enn null, eller når den er på null liter så kan det ikke bli mindre…det kan ikke være minus liter på en bil…kanskje på et bankkort men ikke på en bil.
L: Du skriver «$Funksjon[60-0.5x, 60, 0]$»
Men hva blir feil i dette tilfellet?
I: Jeg ser det nå, det skal vel være 0,60…skal det ikke som start- og sluttverdi?
L: Nja, men hvilken akse er det du definerer verdiene på her? Er det x- eller y-aksen?
I: Ja, det er klart…x-aksen selvsagt
L: Nettopp, så da må du se hvor langt du kom da, og hvor langt var det?
I: Ja, det var det jeg kom på i ettertid, og da hadde jeg prøvd begge deler så da orket jeg ikke å…jeg s kulle hatt 120.

Som utdraget viser prøvde han allerede fra starten å avgrense grafen til den definisjonsmengden og verdimengden som var interessant for oppgaven. Han fikk det ikke helt til, men refleksjonene og den kritiske sansen han viser under intervjuet indikerer gode begrepskunnskaper.

Oppsummering fra intervjuet med Isak –hovedfunn fra analysen
Tar man alle dataene under ett, og tolker de i lys av analyseskjemaet, vil Isak kunne plasseres i hovedkategorien begrepskunnskap, og i stor grad holdt han seg på det reflekterende nivået. Han var ikke kontekstavhengig i sine beregninger. Et klart funn er at de elevene som har gode begrepskunnskaper også benytter seg av algoritmer, regler og prosedyrer (ARP) i sine beregninger, men som sagt ligger det noe mer bak. Isak reflekterte rundt matematikken bak, og ga begrunnede stikkord for prosedyrene (kommandoene) som forenklende, tidsbesparende, effektivt og nøyaktig. Dette betyr at Isak er i stand til å bruke prosedyrer eller kommandoer i Geogebra, men samtidig kan han forklare hvorfor de er riktige, og hvorfor det som kommer frem i programmet er riktig. Isak viser generelt sett gjennom intervjuet at han har god matematisk oversikt, og kan trekke tråder til andre delemner i faget (overførbarhet).

En kan altså si at Isak beveger seg mellom prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, og ser koblingen mellom dem i de kontekstene der han blir bedt om det. Hvorvidt oppgavene var virkelighetsnære og praktiske spilte ingen rolle slik det fremkom i datamaterialet.

Isak konverterer, og ser sammenhengene mellom representasjonene på en tilfredsstillende måte, både når det gjelder fra formel til graf, og omvendt (fra oppgave 3). Konverteringer fra situasjon til graf (modellering), og graf til situasjon (tolkning), hadde han også kontroll på. Han så også nytteverdien av å bruke en verditabell ved manuell tegning (papir) av en andregradsfunksjon.

4.1.3 Anna

Anna fikk frem en helt klar prosedyrekunnskap i starten av intervjuet. Utsagn som gjør at hun umiddelbart kan plasseres i ARP-kolonnen er eksempelvis fra oppgave 1:

> L: Kan du forklare hva oppgave 1 egentlig går ut på?
> A: Det er å skrive dette her inn i Geogebra omtrent akkurat lik det står, åsså kjem grafen automatisk frem på Geogebra

Et annet eksempel fra oppgave 2 er:

> L: Kunne du forklart meg litt hvordan du tenkte i begynnelsen her?
> A: Altså jeg startet med å skrive inn det funksjonsuttrykket der da (peker på $y = 2x + 2$) inn i Geogebra. Åsså har jeg lært så mye som at hvis du skriver $y = 6$, så kjem det en rett linje som krysser den andre linjen, og da har vi et skjæringspunkt. Da ser vi på grafen, og skjæringspunktet at x = 2. Jeg brukte «skjæring mellom to objekter», og når jeg trykker på de to strekene så får jeg svaret.

Et siste eksempel som bekrefter dette er fra oppgave 6a:

> L: Hvordan tenkte du her?
> A: Emm…(pause 4, sek)…jo…først så fant vi ut det at etter at det hadde gått null år, var det (utslippet) på 260 tonn, så det blir jo det det første toppunktet (henviser til punkt (0,260)). Åsså vet vi at når det har gått 10 år så er det på 60 tonn, og da har vi jo to punkter så da kan vi tegne en strek…og da vet vi det liksom…og da har vi på en måte grafen

I alle tre eksemplene over kom oppfølgingsspørsmålet om å forklare hva hun så, og hvilken matematikk som lå bak. Dette var svært vanskelig for henne. Anna klarte ikke å forklare grafen i oppgave 1a ut fra formelen alene, med tanke på begreper som stigningstall og konstantledd. Hun trengte i tillegg grafrepresentasjonen for å se sammenhengen. Igjen dukket behovet for flere representasjoner samtidig opp, slik som det gjorde hos Max tidligere. I denne prosessen kom som nevnt begrepet stigningstall opp, og hva det betydde. Det samme kan delvis sies om konstantleddet. Hennes egne ord knyttet til konstantleddet var «Det er hvor den starter», og eksemplifiserte dette via andre lineære funksjoner på samme abstraksjonsnivå. Dette støtter antagelsene og tolkningen om at hun kan nærme seg det primære nivået (PN) for begrepskunnskap. Det som kanskje talte imot et slikt nivå, var at det nærmest var umulig å tenke omvendt. Det vil si at å gå fra en graf til en formel nesten var utenkelig. Dermed manglet hun vesentlige deler som for eksempel godt utviklet fleksibilitet og reversibilitet. Selv om hun kjente til begrepene stigningstall og konstantledd var hun ikke i stand til å bruke disse for å finne formelen ut fra grafen på egenhånd. Av den grunn er det rimelig å antyde at hun ikke hadde den kunnskapen som skulle til for å kunne konvertere effektivt og trygt, eller se den tydelige sammenhengen mellom disse to enkle representasjonsformene. Dette fungerer da som en hemmende faktor, slik Hiebert & Lefevre (1986) presiserte, med tanke på utviklingen og konstruksjonen av koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskapene. Slik sett kan man på forsvarlig vis anta at kunnskapen kan knyttes opp mot prosedyrekunnskaper.

Det generelle inntrykket fra hele intervjuet er at Anna prøver å memorere, eller imitere det læreren (eller noen andre) har gjort før, og at de bakenforliggende matematikk-kunnskapene ikke er tilstede. Det som kanskje så ut til å peke mot det primære nivået for begrepskunnskap, har falt tilbake og peker nå mot prosedyrekunnskap, basert på husk og oppskrifter (rote learning). Videre bekreftelse på prosedyrekunnskaper er blant annet utsagn som: «*Du ser det står x bak stigningstallet, og denne kan forandre seg*».

Med utgangspunkt i dette utsagnet om at x kan variere, ble verditabellen innført som ny representasjon. Hun kjente igjen noe av dette, prøvde å sette inn verdier, men klarte ikke på egenhånd å gjøre de nødvendige beregningene. Hun kjente igjen det matematiske språket, eller det syntaktiske oppsettet (MS), men ikke nødvendigvis betydningen av hva som kom ut av det (koordinater). I tillegg klarte hun heller ikke å løse eller beregne det på egenhånd. I oppgave 3 beskriver hun kommandoer som hun gir Geogebra for å få frem det oppgaven spør etter, men igjen var det store mangler på å se sammenhengen. Med andre ord er det en gjennomgående mangelfull evne til fleksibilitet og forståelse for å koble representasjonene sammen. Dette støttes i flere forklaringer gjennom intervjuet.

Et vesentlig funn, som også blant annet Max bekrefter, er at virkelighetsnære og praktiske oppgaver, slik som eksempelvis oppgave 4 og 5 i settet, enklere lar seg løse på tross av vanskeligere funksjonsuttrykk. Her ga hun gode betraktninger med egne ord, og ga uttrykk for å skjønne hva dette betydde. Hun videreførte begrepene stigningstall og konstantledd inn i oppgave 4, noe utdraget under viser:

> A: Først så fant jeg ut at 500 ble brukt uansett, så…og jo flere som kommer jo flere får du på her da på en måte (henviser til 150 kr pr elev i oppgaveteksten). Kommer de 10 stykker får du 1500 kroner pluss 500 da, som blir 2000 kroner. Så når du skal ha for 50 russ seinere (viser til oppgave b) så gjør du samme prosedyre der…at du tar 50 og ganger med 150 og legger til 500.
> L: Hvis du skal bruke de samme begrepene som du har brukt før, med konstantledd og stigningstall…kan de se noen sammenheng mellom det som står der og de to begrepene?
> A: Asså…konstantleddet måtte i hvert fall bli 500, fordi det var her vi startet, fordi det var allerede brukt liksom, og da blir stigningstallet 150, fordi det kommer an på hvor mange som kommer.

Oppgave 5 hos Anna underbygger funnet om at virkelighetsnære og praktiske kontekster ofte kan virke enklere for elevene. Hun gjorde gode betraktninger om hvordan drivstoffnivået på tanken endret seg i takt med hvor langt hun kjørte, og viste tydelig hvordan opplysningene i oppgaven hang sammen. Selv om Anna virker å være kontekstbundet, er dette noe som kan indikere begrepskunnskaper på et primært nivå (PN). Dette begrunnes ut fra måten hun forklarte den matematiske sammenhengen mellom de ulike opplysningene i oppgaveteksten. Dette bekrefter også en viss fleksibilitet og en konvertering fra situasjon til formel (modellering).

Selv beskrev Anna virkelighetsnære oppgaver som mer intuitive. Det er enklere å skjønne at man kan prøve seg frem og sette inn ulike verdier. Dermed var det enklere å forstå hvordan man skulle angripe slike oppgaver, spesielt uten Geogebra som verktøy. I tillegg viser dette funn av vekslingen mellom prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, som også er gjort hos de andre. Hun var tidlig ute med å bruke begrepet prosedyre. Hun viser at hun ser på x-leddet som en variabel, og at man kan sette inn hvilket som helst tall (antall personer), og få den totale kostnaden for festen. I tillegg bruker hun prosedyrekunnskapen (ARP) til å dobbeltsjekke via Geogebra om hvor mye den totale kostnaden vil være for 50 russ på julebordet.

Det viste seg også at Anna, i likhet med Max, brukte representasjoner ubevisst, spesielt i de virkelighetsnære oppgavene der det var opplagt at man kunne sette inn verdier for x. Spesielt gjaldt dette dersom de skal komme fra formel til graf. I Anna sitt tilfelle kan dette eksemplifiseres fra oppgave 5. Her viste hun at hun tenkte tabell som en mellomstasjon fra formel til graf, selv om hun ikke eksplisitt nevnte begrepet tabell.

> A: Hvis du kjører to mil, vil du ha igjen 59 liter på tanken
> L: Ja, det er riktig...(avbrutt)
> A: Å kjører du 4 mil vil du ha igjen 58 liter på tanken.

Dette indikerer og støtter antagelsen om at elever ofte bruker representasjoner ubevisst, og at de svarene hun får er koordinater som hun plotter rett inn i koordinatsystemet. Grunnen til at bruken av representasjoner omtales som ubevisste er at Anna, og flere av de andre, ikke nevnte selve representasjonen (tabellen) som fungerte som en mellomstasjon, og at det de egentlig regnet ut var koordinater, selv om de brukte svarene de fikk som koordinater. De stilte seg også spørrende da de ble konfrontert med dette. Dermed vil det være rimelig å tolke og anta at ubevisst bruk av representasjonsformer faktisk er tilfelle. Janvier (1978) skriver også at dette er helt i tråd med hvordan elever oppnår fleksibilitet på konverteringer mellom representasjonsformer (Janvier, 1978, s. 3.3).

Oppsummering fra intervjuet med Anna – hovedfunn fra analysen

Anna er en elev som i all hovedsak har prosedyrekunnskaper innenfor temaet lineære funksjoner, når man betrakter dataene samlet. Hun kjenner til regler og prosedyrer for hvordan Geogebra kan benyttes, og av og til kjenner hun igjen det matematiske språket. Det virker som hun husker og memorerer hvordan oppgaver skal løses (via kommandoer i Geogebra). Derfor har hun liten evne til å overføre kunnskapene utover oppgaven, og er lite fleksibel og reversibel i tankegangen. Som nevnt tidligere virket hun avhengig av konteksten, og klarte ikke på samme måte som Max og Isak å forklare de matematiske sammenhengene som lå bak prosedyrene (kommandoene). Hun kunne generalisere på et enkelt nivå, spesielt da hun fikk se flere representasjoner samtidig, spesielt mellom formel og graf, og delvis situasjon og graf. I de praktiske oppgavene viste hun noen grad av begrepskunnskaper (PN) ved at hun overførte viktige begreper (eks. stigningstall og konstantledd) inn i disse, og at hun ubevisst brukte representasjoner (her tabell) for å komme frem til det endelige resultatet. Andre matematiske sammenhenger, som for eksempel å finne skjæringspunktet mellom grafer, var for hennes del kun rettet mot Geogebra. Hun så ikke at blant annet likninger kunne brukes som en strategi. Dette er ifølge Kilpatrick et al. (2001) noe elever med begrepsforståelse (begrepskunnskap) ville klart. De ser forbindelser mellom kunnskapsenhetene, og dette gjør de i stand til å se ting i lys av ideer de allerede kjenner til (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-120).

4.1.4 Julia

Julia kan i likhet med noen av de andre umiddelbart plasseres i ARP-kolonnen. Det er tydelig at hun kan prosedyren med å tegne inn funksjoner i Geogebra. Hun forteller også at i uttrykket $y = x + 1$, står det egentlig «*Et ukjent tall, pluss en*». En annen variant som fremkom var at det sto «*1 ganger x, pluss en*». På spørsmål om hva de ulike leddene betydde var hun helt blank. Dette viser at hun ikke var i stand til å begrunne hvorfor grafen hun fikk i Geogebra var riktig sammenlignet med formelen. Hun visste at x hadde noe med en ukjent å gjøre og noe som skulle variere, men ga inntrykk av at hun ikke visste hva som skulle variere. Det meste av hva hun fortalte kan knyttes til ARP-kolonnen, og deler av forklaringen til MS-kolonnen. Hun kjente igjen deler av det matematiske språket (MS), spesielt så det ut som om hun så det dersom det var syntaktisk riktig oppstilt. Julia så at det var en variabel der i tillegg til et tall, og at det da dreide seg om lineære funksjoner. Da hun fikk det visuelle bildet av grafene, kom det litt flere begreper på banen, spesielt når begrepet stigningstall ble introdusert for henne.

> L: Stigningstall – har du hørt om det før? Og hva kan i så fall det være?
> J: Ja…det betyr at det går en bort og opp (viser til uttrykket $y = x + 1$).
> L: Hvis det hadde stått 2x da?
> J: Da er det 2 bort og 2 opp…
> L: Jaha, hvis vi ser på denne ($y = x + 1$), og gjør som du sier: To bort og to opp, da er vi fortsatt på denne grafen da?
> J: Ja stemmer, vi må ta en bort og to opp.

Utdraget over viser tydelig at Julia har hørt om begrepet stigningstall, men hele seansen ga en følelse av memorering og husk fra tidligere, og som minner om det Hiebert & Lefevre (1986) omtalte som rote learning. Stigningstallet til det første uttrykket taklet hun tilsynelatende bra, men da oppfølgingsspørsmålet med $2x$ kom, falt alt igjennom. Dette kan tolkes som et tydelig tegn på ARP, fordi hun kunne fortelle noe om stigningstallet, men var svært avhengig av oppgavekonteksten og grafen for å klare det. Hun rettet seg selv opp da hun ble konfrontert med stigningstallet 2, og dette kan støtte tidligere funn om at elevene kan ha behov for å se flere representasjoner samtidig for å få den helhetlige sammenhengen mellom en formel og en graf. Da hun fikk et nytt spørsmål knyttet til en annen lineær funksjon mestret, hun ikke med en gang å si noe om begrepene stigningstall og konstantledd. Hun kommer frem til at tallet med x bak er stigningstallet, og det andre tallet er konstantleddet. Igjen peker det mot at Julia har prosedyrekunnskaper, med spesielt vekt på ARP-kolonnen.

I oppgave 3 bruker Julia Geogebra som en ren prosedyre. I oppgaveløsningen svarte hun: «[…] blir formelen $y = x + 2$. Jeg kom frem til dette ved å føre inn tallene som oppgaven viser, og finne punktene, deretter dra en linje gjennom punktene og finne frem navnet på formelen». På spørsmål under intervjuet klarte hun ikke å forklare sammenhengen noe nærmere enn det hun forklarte i oppgaveløsningen. Dette støtter antagelsen om at noen elever pugger strategier (kommandoer/prosedyrer) som bidrar til mestring av bestemte oppgaver.

Julia ble også presentert for en verditabell, og selv om hun tidligere hadde sagt noe om at x var en variabel, og at man kunne bruke denne til å regne ut noe, uten grafen, klarte hun ikke å formidle hva dette dreide seg om. Imidlertid klarte hun å regne ut ulike verdier da hun ble satt på sporet. Det ble likevel for vanskelig å oversette dette til koordinater. Hun manglet tydelig den fleksibiliteten og reversibiliteten som skal til for å kunne plasseres i PN/RN, eller at kunnskapene kan tolkes mot begynnende begrepskunnskaper på dette området. Tolkning av hele situasjonen, tilsier at Julia ikke klarte å se den fulle iboende sammenhengen mellom Janviers representasjoner og selve oversettelsesprosessen.

Når dette er sagt må det også presiseres at da hun kom til oppgave 4 klarte hun med egne ord å forklare hva funksjonsuttrykket ble. Med en liten påminnelse om begrepene stigningstall og konstantledd viste hun relativt gode kunnskaper, og dermed klarte hun å komme fra en situasjon til en formel (modellering). Dette viser noe fleksibilitet som kan knyttes opp mot det primære nivået, siden det viste seg å være ganske så kontekstavhengig.

> L: Hva var tanken bak å skrive det uttrykket som du gjorde? ($y = 150x + 500$)
> J: Fordi det er 150 ganger et ukjent tall, også er det alltid 500. De 500 kommer alltid uansett, fordi det var jo innkjøp som var gjort i forkant av festen…altså duker, servietter osv.
> L: Ja, det er riktig. Hvordan kan du linke dette sammen med stigningstall og konstantledd da?
> J: Altså, 150 må være stigningstallet da, fordi kostnadene øker vel med 150 kroner for hver ny person som kommer på festen, og konstanleddet er vel 500, siden det alltid er konstant.

Hvordan klarte Julia å gi gode betraktninger knyttet opp mot denne oppgaven, samtidig som hun hadde liten forståelse for de mekaniske oppgavene? Forklaringen på det kan blant annet være at hun gjennom de første oppgavene (i intervjuet) hadde fått tydeligere kunnskap om hva begrepene betydde, og at hun på sett og vis koblet disse sammen med oppgaven som ble gitt. Hun uttrykte litt nølende at den grafen hun hadde funnet, skulle krysse eller starte i 500. Hun nevnte ikke begrepet konstantledd eksplisitt, men gjennom forklaringene hennes ble det tydelig at det var det hun mente. I oppgaveløsningen kom også tydeligere begrepskunnskaper frem, som fortonet seg på samme måte som da hun forklarte oppgaven under intervjuet. Hun klarte også delvis å forutse konsekvensen av hva som skjedde, dersom oppgaven var å finne hvor mange elever som var på julebordet hvis den totale kostnaden var 16000 kroner. Da hadde hun allerede svart at med 50 elever ble kostnaden på 8000 kroner i oppgave b. Hun presiserte at det måtte være mer enn 100, siden grafen startet på 500. Hun ble i tillegg utfordret til å svare på hvor grafen ville startet dersom påstanden «hvis det koster 8000 kroner for 500 elever, vil det koste 16000 kroner for 100 elever» er riktig. «*Da må grafen krysse i null*». Hun kommenterte ikke stigningstallet, og drøftet hva det i så fall måtte bli. Denne påfølgende seansen, som før øvrig ikke var en del av oppgavesettet de hadde gjort, indikerer at Julia har noe som peker mot begrepskunnskaper rundt dette. Dette kan også sees i lys av tidligere funn som bekrefter at elever beveger seg mellom de ulike kunnskapene, avhengig av konteksten på selve oppgaven. Dette tydeliggjør oppgave 6 i enda større grad. Her så hun noen tall, og resonnerte riktig i forhold til disse, men det viste seg at hun ikke klarte å se den matematiske sammenhengen i denne oppgaven. Her benyttet hun seg av prosedyrer som hun hadde lært seg, eller memorerte fra tidligere løste oppgaver.

> L: Hvordan tenkte du her da – i starten på oppgave 6?
> J: Eh…(pause, 8 sek)…det er 260 tonn som er utslippet, åsså skal det bli til 60 tonn i løpet av 10 år. Så da plottet jeg punktet (0,260) først fordi de viser at utslippet er 260 tonn før de har begynt å redusere. Åsså vet jeg at x-aksen beskriver antall år da, så da må det neste punktet bli (10,60) fordi etter 10 år skulle utslippet være 60 tonn. Så tok jeg ei linje gjennom disse to punktene.
> L: Det høres riktig ut. Hvis du ikke hadde hatt Geogebra da, hvordan kunne du løst denne da?
> J: Tja, si det…nei det veit jeg ikke

Hun uttrykte eksplisitt at dersom hun ikke hadde hatt Geogebra, ville hun ikke klart å løse denne oppgaven. Dermed kan det igjen tolkes som ARP og prosedyrekunnskap.

Hun har tidligere i oppgavene stort sett vist ARP, men i oppgave 4 har hun glidd mer over på PN, og delvis over på RN, for så å gå tilbake til ARP. I tillegg støtter løsningen av oppgave 4, som også flere andre av informantene påpeker, at virkelighetsnære og realistiske oppgaver på mange måter er mer intuitive, og at de dermed er enklere og mer håndterlige å angripe. Dette kan også være en forklarende faktor på hvorfor Julia klarte å betrakte oppgave 4 slik hun gjorde.

Oppsummering fra intervjuet med Julia – hovedfunn fra analysen

Julia viste i all hovedsak gjennom intervjuet en form for prosedyrekunnskap. Hun visste godt hvordan man kunne bruke Geogebra på flere av oppgavene, men manglet de bakenforliggende matematiske kunnskapene. Dermed kunne hun ikke gi en forklaring på sammenhengen mellom det hun skrev inn i Geogebra og det hun fikk ut. Slik sett brukte Julia kommandoer i Geogebra som en ren prosedyre, og dette er eksemplifisert tidligere fra oppgave 3. Da hun så begge representasjonene (formel–graf) samtidig i Geogebra, fikk hun delvis vist at hun så sammenhengen mellom representasjonene. De andre representasjonsformene ble vanskelige, spesielt tabellen i de mekaniske oppgavene. Hun så ikke at det som kom ut av tabellen var koordinater som kunne brukes for å plotte grafen. Uansett, mye av det som kom frem under intervjuet virket til å være oppskrifter hun hadde lært seg, men av og til glimtet hun til med å vise noe mer utover prosedyrekunnskapen, spesielt i de oppgavene som man kan betrakte som virkelighetsnære. Dette er et funn som støtter antagelsene om at elever blander prosedyrekunnskap og begrepskunnskap avhengig av konteksten på oppgaven. Kort sagt betyr dette at hun i noen oppgaver kan tilskrives prosedyrekunnskaper, men i andre oppgaver begynnende begrepskunnskaper. Jevnt over manglet hun vesentlige og viktige ferdigheter som for eksempel robust fleksibilitet og overføringsevne, noe som er viktig for å være på det reflekterende nivået for begrepskunnskap.

4.1.5 Overordnet skjema som viser kodingen av hver enkelt elev

Tabellen 4-1 viser hvilken kategori av kunnskap informantene er plassert i gjennom analysen av de ulike oppgavene. Dette er vel og merke en grovskisse, og dermed kanskje ufullstendig. Poenget med å ta med denne tabellen var i utgangspunktet at den tydelig fikk frem ett funn fra datamaterialet som ikke ville blitt like fremtredende i intervjudelen. Funnet dreier seg om at oppgavene alene og isolert sett, i stor grad ikke får frem annet enn det man kan kategorisere som prosedyrekunnskaper. Ut fra tabellen ser man nesten utelukkende at informantene fikk vist det primære og reflekterende nivået gjennom intervjuet (se PN/RN merket rødt for intervjuet, og PN/RN merket blått for oppgaveløsning). Det viser seg at i underkant av 70% av begrepskunnskapstilfellene forekommer i intervjudelen, mens i overkant av 30% forekommer i selve oppgaveløsningen. Dette kan blant annet henge sammen med at det under intervjuet var rom for å avgi forklaringer, fritt fortelle hva de hadde tenkt og reflektere rundt dette. Slike refleksjoner er stort sett tankevirksomhet når man sitter og arbeider med oppgaver, og dermed ikke en like naturlig del for elevene å ta med som betraktninger i svaret på oppgavene. Dette kan relateres til Skemp (1976), som poengterte at for å vurdere om elevene har en relasjonell forståelse må man snakke med de om sammenhengen, ikke bare basere seg på oppgaveløsningen (Skemp, 1976, s. 12).

Det var først i de virkelighetsnære oppgavene at man kunne se tegn på begrepskunnskaper gjennom selve oppgaveløsningen. Her ble forklaringsmomentet en del av oppgaven, noe de ikke så tydelig ble i de mer tradisjonelle og mekaniske oppgavene.

Tabell 4-1: *En grovkoding av kunnskapen gjennom oppgavesettet – fra oppgaveløsing til intervju (Løs=oppgaveløsning, Int=intervju)*

Oppgave	Oppgave 1		Oppgave 2		Oppgave 3		Oppgave 4		Oppgave 5		Oppgave 6	
	Løs	Int	Løs	Int	Løs	Int	Løs	Int	Løs	Int	Løs	Int
Max	ARP MS	ARP RN	ARP MS	PN RN	ARP MS	ARP	RN ARP	ARP RN	ARP	RN	RN ARP	RN ARP
Isak	ARP	RN	ARP	ARP RN	ARP	ARP PN	RN ARP	RN	ARP RN	RN	RN ARP	RN ARP
Anna	ARP	MS PN(?)	ARP	ARP MS	ARP	PN	PN	PN RN ARP MS	PN RN	RN MS	ARP	ARP
Julia	ARP	ARP MS	ARP	ARP MS	ARP	ARP	PN ARP	PN/RN ARP	ARP	ARP	ARP	ARP PN

Rød merking indikerer begrepskunnskap under intervju. Blå merking indikerer begrepskunnskap under oppgaveløsning.

5. Diskusjon

Kapittel 5 skal synliggjøre og svare på forskningsspørsmålene med bakgrunn i teorien, forskningen og funnene som er presentert i henholdsvis kapittel 2 og 4. Annen relevant forskning som ikke er presentert i teorikapittelet, vil bli trukket inn for å belyse sider ved funn som rammeverket ikke dekker tilstrekkelig. Kapittelet er inndelt i to delkapitler. Delkapitlene er knyttet opp mot hvert av de to forskningsspørsmålene som er presentert i kapittel 1.3

Videre er det viktig å ha den overordnede problemstillingen i bakhodet mens forskningsspørsmålene diskuteres. Som presentert tidligere er problemstillingen:

Hvordan viser elever kunnskaper om lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?

5.1 Forskningsspørsmål 1

Hvilke kunnskaper viser elever når de arbeider med sammenhengene mellom de ulike representasjonene for lineære funksjoner, og kan støtte seg på Geogebra?

Gjennom analysen av datamaterialet er det helt tydelig at informantene varierer mellom det å vise prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, avhengig av hvilken kontekst oppgaven er presentert i. I tillegg ser man at de oppgavene som ikke inviterer til å vise begrepskunnskap (jf. oppgave 1-3), ikke automatisk får frem denne kunnskapen. Dette kan relateres til Skemp (1976), som presiserte at det er vanskelig å vurdere den mentale prosessen (forbindelser mellom kunnskapsbitene) som skjer hos elevene, bare ut fra selve oppgaven. En samtale i etterkant vil være helt sentral (Skemp, 1976, s. 12). I de tre siste oppgavene, som er knyttet opp mot praktiske situasjoner kommer begrepskunnskapene klarere frem, antageligvis fordi det er mer naturlig å forklare sammenhengen ut fra en oppgavetekst (situasjon). Dette blir godt synlig i tabell 4-1 (s. 78). Slik sett fikk intervjuet en viktig rolle ved å avsløre begrepskunnskap i de tre første oppgavene.

Starten på oppgavesettet ble dermed preget av prosedyrekunnskaper, noe som også var intensjonen. Alle informantene gikk fra formel til graf og fra tabell til graf via noen få tastetrykk (kommandoer) på Geogebra, antageligvis uten å tenke noe mer over hva som dukket opp på skjermen, eller hvorfor de to representasjonene stemte overens. I begynnelsen av intervjuet var det også overvekt av prosedyrekunnskaper. Flere av informantene klarte bare å forklare oppgaven på nytt ved å gjengi kommandoen fra Geogebra (ARP). Det var bare Isak som umiddelbart tok i bruk tankegangen om stigningstall og konstantledd, og derfra forklarte sammenhengen mellom formel og graf (begrepskunnskap). I midlertid var to andre informanter avhengig av å se disse to representasjonene samtidig for å forklare sammenhengen. Max, som innehar gode begrepskunnskaper, trengte også å se disse representasjonene sammen for å kunne forklare sammenhengen. Dette kan relateres til Skemp (1976), som skrev at matematikk som var lært relasjonelt, enklere kan re-innlæres eller gjenkalles. Hiebert & Lefevre (1986) forklarte også at dersom det er forbindelser mellom kunnskapsbitene (både prosedyrer og begreper), vil selve strukturen eller nettverket av kunnskaper, hjelpe eleven til å finne riktig prosedyre. Da Max fikk se den grafiske fremstillingen sammen med formelen, så han umiddelbart sammenhengen. Max trengte med andre ord et stimuli, en ytre påvirkning for å skape en reaksjon, som resulterte i at han fant tilbake til sammenhengen. Forskningsspørsmål 2 besvarer mer inngående funnet om det å illustrere flere representasjoner samtidig, og at dette ser ut til å styrke koblingen mellom de ulike representasjonsformene.

Det viste seg at minst to av informantene fikk frem tydeligere begrepskunnskaper da de oversatte fra en praktisk situasjon og videre til en formel eller en graf. De beskrev selv at det på en måte ble enklere å angripe oppgavene, at de var mer intuitive. Her viste informantene begrepskunnskaper, selv om de utlukkende viste prosedyrekunnskaper i de første oppgavene. De klarte til dels å knytte begreper som stigningstall og konstantledd til riktige opplysninger fra konteksten, og viste dermed at disse begrepene ikke var direkte koblet til en bestemt oppgavetype. Med andre ord klarte de å oversette mellom noen representasjoner, blant annet fra situasjon→formel, basert på noe annet enn bare memorering. Hiebert & Lefevre (1986) påpekte at begrepskunnskap må læres meningsfullt. Dette kan ikke tolkes bokstavelig, slik at oppgavene/problemene nødvendigvis alltid skal være relatert til praktiske situasjoner. Poenget er at det skal virke meningsfullt for elevene. Et slikt funn blir dermed viktig å se i lys av, og relatere til begrepet *realistisk matematikkundervisning* (RME). Van den Heuvel-Panhuizen (1998) skriver at realistisk matematikkundervisning, slik det fremstår, bygger på Freudenthal (1977) sitt syn på matematikk. I følge han må matematikk være koblet til virkeligheten, være nær elevene og relevant for samfunnet. Matematikk må sees på som en menneskelig aktivitet (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998, s. 3). Matematikken må bygge på kontekster som er kjente for elevene, ikke nødvendigvis bare «real-world»-kontekster. Det viktige er at konteksten er en kilde for å lære matematikk. Ved å arbeide rundt konteksten, kan elevene opparbeide seg matematiske verktøy (prosedyrer) og begrepskunnskap. Anna arbeidet en stund med oppgave 5 (drivstoffoppgaven) under intervjuet. Hun fikk undersøke sammenhengen mellom et uttrykk og en tabell, for videre å skissere grafen. Under denne prosessen, fikk hun ikke helt frem sammenhengen mellom formel og tabell slik som nevnt tidligere. Derimot ble det ganske klart hvorfor stigningstallet ble negativt. Elever kan dermed utvikle prosedyrer, eller en form for begrepskunnskap som ligger på det primære nivået, som i første omgang er koblet til konteksten. På et senere tidspunkt, etter arbeid med ulike aspekter ved konteksten, kan dette utvikle seg til å bli en modell som muliggjør å løse andre relaterte problemer (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998, s. 4). Dette kan også sees i lys av Hiebert & Lefevres (1986) kobling mellom rote learning og begrepskunnskap. Begrepskunnskap kan ikke utvikles direkte gjennom rote learning, slik prosedyrekunnskap kan. På sikt kan prosedyrekunnskap gå over til begrepskunnskap om elevene på et tidspunkt kobler og finner sammenhenger mellom isolerte kunnskapsbiter (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8). Som en ytterligere støtte til dette påpekte Janvier (1978) at dersom konteksten er kjent, vil elevene enklere klare å oversette mellom representasjonene. Mentale bilder eller kjennskap til situasjonen kan støtte dem i oversettelsen (Janvier, 1978, s. 3.5). Det er helt tydelig at Julia og Anna har fordeler med de praktiske kontekstene. Dette kommer spesielt godt frem i oppgave 4 (julebordoppgaven), der oversettelsen mellom situasjon og formel går problemfritt. Forklaringene rundt matematikken bak, er også tilfredsstillende. Det er sannsynlig at dette kan relateres til mentale bilder eller kjennskap til situasjonen, som på sin side forenkler selve oversettelsesprosessen for disse jentene.

Bardini, Pierce & Stacey (2004) gjorde en studie der de utforsket elever som arbeidet med lineære funksjoner og likninger i en kontekst med en graftegner. De konkluderer studien med at å bruke virkelige problemer, vil elever se matematikken som nyttig. De lærer å skrive de algebraiske reglene på en konvensjonell måte. Resultatet av å arbeide i en virkelighetsnær kontekst gjorde at elevene bedre skjønte bruken av symboler, og de forsto enklere at funksjoner beskriver sammenhengen mellom to variabler (Bardini, Pierce & Stacey, 2004, s. 374). Konklusjonen av studien til Bardini et al. (2004), kan også relateres til funnet hos Anna, Julia og til dels Max i oppgave 4. Dette var en oppgave som de tydelig fikk vist at de så sammenhengen mellom to variabler, der den ene beskrev den totale kostnaden, og den andre antall russ. Anna og Julia antydet også at x-leddet ga mer mening under intervjuet. De ga uttrykk for at de fikk en bedre forståelse for bruken av symboler, og hvorfor de ble brukt.

Dermed må kanskje matematikklærere gå litt i seg selv når dette temaet skal undervises. Tradisjonelt sett bygges undervisningen opp via eksempler som læreren tenker på som enkle ($y = x + 1$), men likevel så abstrakte for mange elever. De har ingen knagger å feste det til, og mange vil sannsynligvis bare huske formen på slike funksjoner. Som tidligere nevnt fikk flere av informantene frem en tydeligere begrepskunnskap når konteksten stammet fra en virkelig situasjon, kontra en mer standardisert oppgave. Dette kan indikere, at spesielt de svake elevene får en bedre oppfatning av problemet, når de selv kan oppdage ulike sammenhenger og aspekter ut fra en kjent kontekst. Begrepene i dette tilfellet, stigningstall og konstantledd, fikk en tydeligere mening for informantene, og det ble klarere hvordan situasjonen, formelen og delvis grafen var koblet sammen. Sett med kritiske øyne, ble det under intervjuet og spesielt i samtalen rundt de første oppgavene, et stort og repeterende fokus på stigningstall, konstantledd og koblingen opp mot graf. Dermed er det også rimelig å anta at dette gjorde informantene bedre rustet til å forklare og begrunne sammenhenger rundt de siste virkelighetsnære oppgavene.

To av informantene viste at de hadde gode begrepskunnskaper. Disse informantene brukte også algoritmer, regler og prosedyrer (ARP) i beregninger, og oversettelser mellom representasjonene. Dette mener jeg gjenspeiler den viktige koblingen som bør være mellom begreps- og prosedyrekunnskap. Er prosedyrene koblet sammen med begrepskunnskapene vil prosedyrene komme naturlig, og ikke som en memorering fra isolerte kunnskapsbiter. Prosedyrene kan i så måte utledes når de trengs, og dermed vil gjenkallelse av prosedyrer være basert på forståelse og ikke husk (RN). Dette fremhever også Skemp (1976) som en fordel for relasjonell matematikk (Skemp, 1976, s. 9). Isak og Max viste at de behersket prosedyrene (kommandoene) for å komme fra eksempelvis formel→graf, situasjon→graf/formel på Geogebra, men kunne i tillegg forklare og begrunne matematikken og tankegangen som lå bak selve oversettelsene. Ved at de hadde gode prosedyrekunnskaper klarte de å fokusere på andre viktige aspekter, som for eksempel å kritisk vurdere relevansen av svarene, eller vurdere hvorvidt prosedyren de brukte var riktig (overvåkning av prosedyrer). De frigjorde det Hiebert & Lefevre (1986) omtalte som kognitiv kapasitet. De forklarte at i oppgaveløsningen ble kommandoene brukt fordi det var mer effektivt, nøyaktig og tidsbesparende. For slike elever er prosedyrekunnskapene og begrepskunnskapene internalisert. Dette betyr at elevene kan veksle effektivt mellom kunnskap og utføre handlinger som en tankerekke, ikke nødvendigvis ved å gjøre de (Solvang, 1992, s. 92). I de praktiske oppgavene viste Max og Isak at de var i stand til å konkretisere problemet, og byttet representasjonsform fra situasjon til en graf (oppgave 6). Det er rimelig å anta at de foretok noen mentale betraktninger om problemet, og tok et prosedyrevalg som var i henhold til oppgaven (hvordan finne stigningstallet til utslippsgrafene). Under intervjuet fikk de forklart nærmere hvordan de hadde tenkt, og hvordan det kunne gjøres uten støtte av Geogebra. Siden begrepskunnskapene er på plass, viser elevene god overføringsevne som igjen reduserer antall prosedyrer å huske. Prosedyrene har blitt en del av nettverket som binder kunnskapsbitene sammen (RN). Dette er i tråd med det Hiebert & Lefevre (1986) presiserte om koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskap (Hiebert & Lefevre, s. 12-14).

Det var også interessant å se på hvordan informantene brukte sammenhengen mellom representasjoner som en strategi for å komme fra en representasjon til en annen, og hvilke kunnskaper elevene brukte for å vise dette. Det mest påfallende og klare funnet, er at flere informanter brukte representasjoner ubevisst. Janvier (1978) kalte omtrent det samme fenomenet for indirekte oversettelser. Spesielt Anna, Julia og Max viste dette i oppgave 5. Først brukte de noe som lignet på begrepskunnskap på primært nivå for å komme fra situasjon til formel. Hverken Anna eller Julia klarte umiddelbart å oversette direkte, men trengte litt tid til å tenke gjennom oppgaven og videre forklarte sammenhengen med egne ord. De stilte seg spørsmål som: «Hvor mye er igjen på tanken hvis vi kjører 2 mil?» osv. Slik resonnerte de seg frem til at formelen måtte bli $y = 60 - 0{,}50x$. For å komme fra formel til graf gikk de veien om en tabell, og de brukte i tillegg denne omveien ubevisst. De satte inn noen x-verdier i formelen og fikk ut noen tall som de behandlet som koordinater, selv om de der og da ikke så på dem som det. De knyttet ikke koordinatene de fikk opp mot en verditabell, og klarte ikke se at dette var det samme. De brukte med andre ord en prosedyre om å sette inn noen verdier for x, og deretter få ut noen y-verdier. Dette kan indikere at de ikke har den fullstendige fleksibiliteten som bør være til stede med begrepskunnskaper, spesielt på det reflekterende nivået, slik Hiebert & Lefevre (1986) beskriver det. Umiddelbart kan dette se ut som prosedyrekunnskaper (ARP). De kjente en strategi som ga svaret, men hadde ingen begrunnelser for at det fungerte. Janvier (1978) påpekte at indirekte oversettelser ofte forekom mellom flere av representasjonene, men spesielt mellom formel→graf og fra tabell→formel. I følge avhandlingen hans, skyldes slike indirekte oversettelser elevenes egne kunnskaper og kompetanse. I dette ligger det hvorvidt de kjenner situasjonen (konteksten), eller hvor god matematisk kompetanse de har (Janvier, 1978, s. 3.3-3.4). Dermed kan man veldig grovt knytte direkte oversettelser mot begrepskunnskap, og indirekte oversettelser mer mot prosedyrekunnskap. Mye tyder på at de som foretar indirekte oversettelser ikke har god nok fleksibilitet, eller generalisert kunnskap, slik at nettverket av kunnskapsbitene ikke er godt nok sammenkoblet. Dette vanskeliggjør det å se relasjonen mellom representasjonsformene slik Janvier (1978) beskriver dem. I denne oppgaven er det som nevnt flere indikasjoner på at Anna og Julia oversetter indirekte, både fra situasjon→graf, tabell→graf og formel→graf. For å finne formelen, lagde de seg praktiske eksempler som ga de mulighet til å se formen på uttrykket. Som nevnt satte de inn verdier for x. Gjennom å se hvordan formelen var med de ulike x-verdiene, kom de seg fram til de aktuelle formlene. Via formelen lagde de en tilsvarende «tabell», og tegnet grafen. Det de egentlig gjør er å tenke: situasjon→«tabell»→formel→«tabell»→graf. Selv om de kom frem til riktig svar, er det klare tegn på at mye av dette kan dreie seg om prosedyrekunnskap. De fulgte en prosedyre (ARP), prøvde seg frem med ulike verdier og så om det var syntaktisk riktig oppstilt (jf. formen på uttrykket, MS). Dette kan videre relateres til Hiebert & Lefevres (1986) forklaringer, om at kunnskapsmangel er en vesentlig faktor som kan hindre utviklingen av koblingen mellom begreps- og prosedyrekunnskap. Elever slik som Isak og Max, har gode forbindelser mellom prosedyre- og begrepskunnskap. De vil straks se sammenhengen mellom representasjonene, og prosedyrer som fører til denne sammenkoblingen. Max og Isak er ikke avhengig av konteksten på problemet. De har gode overføringsevner, er fleksible i oversettelsen mellom representasjonene, kan forutse at det ene er en konsekvens av det andre og ser forbindelser mellom begreper og prosedyrer. Derfor befinner de seg på et reflekterende nivå i store deler av temaet om lineære funksjoner.

På en annen siden er det vanskelig å konkludere med at Anna og Julia bare har prosedyrekunnskap, siden de i andre oppgaver elegant oversetter mellom representasjoner (eksempel oppgave 4). Av og til ser likevel selve oversettelsen ut som den er automatisert. For å komme enda dypere inn i en slik analyse, kunne man alternativt brukt Star (2005) og Baroody et al. (2007) sine antagelser om dype og overfladiske kunnskaper, både innenfor prosedyre- og begrepskunnskap. Baroody et al. (2007) hevder at for å ha dype prosedyrekunnskaper forutsetter det til en viss grad noe begrepskunnskap. I eksemplet beskrevet over, er det indikasjoner på at kunnskapene informantene har minner om prosedyrekunnskap (ARP/MS), men at det også kan være spor av begrepskunnskap (PN).

Sett fra et annet perspektiv, kan kunnskapsmangel eller prosedyrekunnskap, være generert fra undervisningen. Det er ikke sikkert faglærer har lagt vekt på å se den iboende sammenhengen mellom representasjonene, og elevene har derfor ikke fokusert på dette. En annen mulighet er at de har arbeidet tilsvarende med å sette inn verdier i den praktiske situasjonen, for derfra å finne både formel og koordinater, og at dette har startet som rene prosedyrer. Situasjonen er gitt. Man sorterer informasjonen, og tenker praktisk, ikke nødvendigvis algebraisk med en gang. Gjennom den praktiske utforskningen genereres det algebraiske uttrykket, som på sin måte kan være en form for generalisering (fra det spesifikke til det generelle for sammenhengen). Dermed kan prosedyrekunnskap omdannes til begrepskunnskap når elevene kobler sammen flere og flere isolerte kunnskapsbiter.

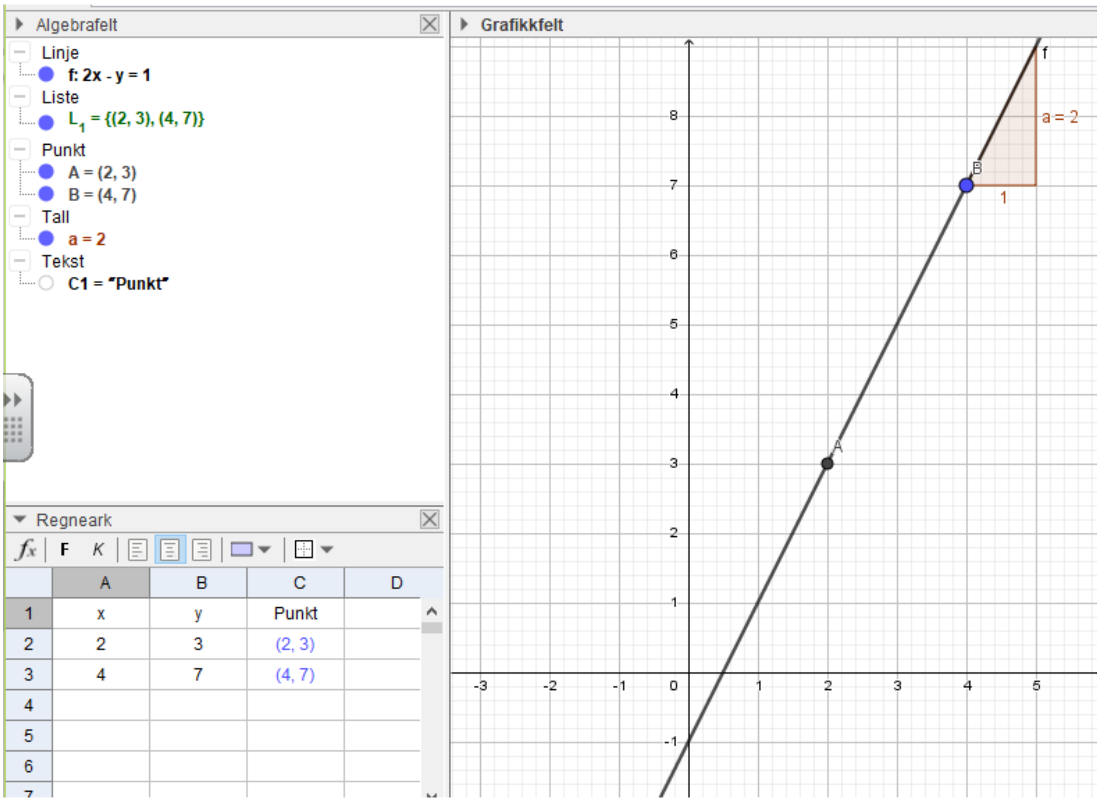
Flere av informantene brukte grafen, eller formelen, til å dobbeltsjekke at svarene de hadde fått stemte overens. De leste av på grafen og kontrollerte ved regning – og omvendt. De har dermed vist at de ser en sammenheng mellom representasjonene, og er i stand til å bruke disse analytisk. De bruker med andre ord de ulike representasjoner av det samme fenomenet for å se om de fikk samme svar (Dienes, 1973).

5.2 Forskningsspørsmål 2

Hvilke muligheter får elevene til å se sammenhenger mellom de ulike representasjonene for lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?

Det viste seg at flere av informantene fikk en visuell «aha-opplevelse» da de under intervjuet skulle koble den grafiske representasjonen og selve formelen via Geogebra. På dette tidspunktet så informantene en tydelig sammenheng mellom grafen og formelen, og de var på ulikt nivå, i stand til å forklare sammenhengen. Sannsynligvis ville nok en graf tegnet på papir (eller på en annen måte) gitt samme «aha-opplevelse». Derfor kan ikke denne opplevelsen direkte tildeles som Geogebras fortjeneste. Siden Geogebra aktivt ble brukt, vil det allikevel være naturlig å se på Geogebra som en brobygger mellom den grafiske representasjonen og det algebraiske uttrykket i disse tilfellene. Anna og Julia uttrykte eksplisitt at de ikke hadde klart å tegne grafene for hånd, så for dem var det helt avgjørende å ha en slik brobygger. Sammenhengen mellom disse to representasjonene ble klarere når de fikk koblet sammen leddene i formelen med det grafiske bildet, og de så at stigningstallet og konstantleddet på grafen korresponderte med leddene i formelen. Dermed indikerer en visning av flere representasjoner samtidig, at sannsynligheten for å forstå sammenhengen kan øke, og slik sett generere begrepskunnskap. Trolig vil denne visualiseringen også gjelde flere overganger/sammenhenger mellom de fire representasjonene til Janvier (1978). Chandler and Sweller (1992), sier at integrerte presentasjoner av representasjonene er lettere å forstå, enn dersom de er presentert separat. Videre kan også Dienes (1973) relateres til dette, fordi han hevder at det samme begrepet presentert på varierte måter, gir elevene muligheter til å oppnå en abstraksjon om matematiske konsepter eller begreper.

Isak sa under intervjuet at Geogebra kan visualisere sammenhengen mellom tre representasjoner samtidig. Elevene kan lage en tabell med to koordinater, overføre disse til grafikkfeltet, tegne en linje mellom dem og samtidig se formelen til linjen i algebrafeltet. Deretter kan de bytte ut tallene i tabellen og se at både graf og formel endrer seg automatisk. Utsagnet til Isak kan relateres til det Persson (2010) fremhever, at digitale hjelpemidler kan vise flere representasjoner samtidig (Persson, 2010, s. 56). Figur 8 viser et slikt utklipp fra Geogebra.



Figur 8: *Utklipp fra tre representasjoner slik Geogebra kan presentere de samtidig*

På denne måten kan de på egenhånd oppdage sammenhengene mellom representasjonene, uten å måtte tegne grafen på papiret. Erfaringsvis vil tegning på papir utløse unøyaktigheter (selv for ei rett linje), som på sin side kan ødelegge sjansen for å enkelt se koblingen mellom representasjonene. Geogebra gir umiddelbar respons, og genererer en nøyaktig graf, som er koblet mot det funksjonsuttrykket man taster inn. Dermed kan tiden brukes til å se etter mønstre og sammenhenger og ikke til tidkrevende papirtegning (jf. frigjøre kognitiv kapasitet). Slik kan det dannes en grobunn for begrepskunnskap. Videre kan prosedyrekunnskapene som trengs for å oversette mellom representasjoner komme i andre rekke, eller forhåpentligvis som en følge av begrepskunnskapene som er lært. Det er selvsagt viktig at de også kan å tegne slike grafer på papir, men inntil sammenkoblingen mellom representasjonene er gjort, kan Geogebra være en god brobygger. Selv om Anna og Julia viste at de så sammenhengen mellom formel og graf under intervjuet, er det fortsatt tvil om de kan tilskrives begrepskunnskaper. Det virket som de forsto det når eksempelet var tilstede, men å se dette i en større kontekst og utover oppgaven, var vanskelig. De klarte eksempelvis ikke å overføre kunnskapen fra de spesifikke tilfellene til neste oppgave. Kunnskapen var fortsatt isolert, og ikke «rik på relasjoner».

For Isak, som ikke hadde problemer med å se sammenhenger eller oversette mellom de ulike representasjonene, fungerte Geogebra som et kontrollverktøy. Flere ganger dobbeltsjekket han egne beregninger opp mot den grafiske representasjonen. Han så, som nevnt tidligere, at den ene grafen han fikk i oppgave 6 (utslippsoppgaven) ikke kunne stemme med situasjonen (konteksten). Grunnet den umiddelbare responsen fra Geogebra, tok han tak i problemet med utgangspunkt i begrepskunnskapene han hadde om sammenhengen (tekst-graf), og modellerte på nytt.

Siden Geogebra har hatt en liten rolle i denne oppgaven, har jeg ikke viet mye tid i diskusjonen til dette. Likevel har jeg funnet en studie av Zulnaidi & Zakaria (2012), som de gjennomførte av videregående elever i Indonesia. De konkluderer med at Geogebra i undervisningen kan ha en positiv effekt på begrepskunnskapene, og at det kan forsterke prosedyrekunnskapene. Grafisk representasjon blir lettere tilgjengelig, og kan gjøre det enklere for elevene å se sammenhenger, og dermed lære mer om ulike emner innenfor funksjoner (Zulnaidi & Zakaria, 2012, s. 105). Dette samsvarer godt med Persson (2010) og Dienes (1973). En videre sammenkobling av resultatene fra denne oppgaven og det Zulnaidi & Zakaria (2012) fant gjennom sin undersøkelse, vil kreve ytterligere studier.

6. Avslutning

I denne avslutningen vil problemstillingen tydelig besvares. Det som kommer frem må ikke sees på som en konklusjon eller en generalisering. Som nevnt tidligere i metodedelen, kan man heller se på resultatet av en slik studie som overføring av kunnskap. Kunnskapen som er utviklet gjennom denne studien, kan vurderes som vesentlige aspekter en matematikklærer kan ta med seg inn i planleggingen av matematikkundervisningen. Kapittelet er bygd opp slik at problemstillingen besvares først, med tilhørende diskusjon. Deretter presenteres noen implikasjoner for undervisning. Helt til slutt kommer det noen tanker rundt veien videre.

6.1 Svar på problemstillingen

Hvordan viser elever kunnskaper om lineære funksjoner når de kan støtte seg på Geogebra?».

Analysen av resultatene og selve diskusjonen, gir klare indikasjoner på at koblingen mellom prosedyrekunnskap og begrepskunnskap er mer sammensatt enn man umiddelbart skulle tro. Elever varierer mellom å bruke prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, avhengig av konteksten på problemet. På den ene siden ser det ut til at de sterke elevene har gode begrepskunnskaper. Dette gir de mulighet til å forklare de matematiske sammenhengene i ulike kontekster (RN), men samtidig bruke prosedyrer og kommandoer effektivt i beregninger, oppgaveløsning og oversettelser mellom representasjoner (ARP). Å kunne bruke Geogebra som et redskap, hjelper elevene til å være nøyaktige og det er tidsbesparende. Det fungerer i tillegg som et kontrollverktøy. På den andre siden ser det ut til at de svake elevene ofte er tilfredse med å ha prosedyrekunnskaper i form av å kunne taste inn riktige kommandoer på Geogebra (ARP). Disse elevene viser ofte at de er avhengige av prosedyrer, både i tradisjonelle oppgaver, og i oversettelser mellom representasjonene. Prosedyrekunnskap innebærer liten grad av overføringsevne og fleksibilitet, og kan ikke sees på som et helhetlig kunnskapsnettverk. Likevel virker det som om når elever får en realistisk kontekst, kommer begrepene og deres betydning enklere frem.

Matematikkfaget er omfattende, og det er ikke reelt å forvente at elever skal ha begrepskunnskaper på reflekterende nivå i hele pensum. På noen områder vil de også bare ha prosedyrekunnskaper, og på andre områder en blanding. Slik sett vil det alltid være en gråsone, der det er vanskelig å plassere elever i riktig kategori. Dette påpekte også Hiebert & Lefevre (1986) ved å kritisere sin egen definisjon (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9). Kilpatrick et al. (2001) får frem mye av denne kompleksiteten som matematikk består av gjennom trådmodellen for matematisk kompetanse. Modellen viser et dynamisk perspektiv, med et sterkt avhengighetsforhold mellom trådene, og at dette er viktig for å få en helhetlig samlet forståelse. Denne modellen har Matematikksenteret også adoptert og oversatt, noe som betyr at dette også er fokus i norsk skole. Studier slik som Rittle-Johnson et al. (1999) og Rittle-Johnson et al. (2001), belyser den sammensatte koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskap, og at den ene kunnskapstypen påvirker og forsterker den andre. Dette samsvarer godt med det Kilpatrick et al. (2001) argumenterer for.

Star (2005) og Baroody et al. (2007) kritiserte teorien til Hiebert & Lefevre (1986) ved å hevde at inndelingen av prosedyre- og begrepskunnskap ikke var god nok. De hadde ikke tatt høyde for ulike kvaliteter innad i kunnskapstypene (se tabell 2-3). Det har heller ikke denne oppgaven gjort, men allikevel er det relevant å knytte en kommentar til dette perspektivet ut fra resultatdelen. Det var til tider vanskelig å eksakt plassere noen av elevene i rett kategori. Flere av informantene viste det som ifølge Star (2005) kalles overfladiske begrepskunnskaper (delvis på PN), eller det som kan sammenlignes med dype prosedyrekunnskaper. Problematiseringen om hva som er riktig terminologi og inndeling drøftes ikke videre.

Ved å ha muligheten til å støtte seg på Geogebra i undervisningen, ligger faren for at elever ikke fokuserer på *hvordan* eller *hvorfor* noe henger sammen. De lærer seg heller oppskrifter eller kommandoer på Geogebra, som løser oppgavene elegant for dem, uten at de selv vet hva som foregår i programmet (ARP). Gjennom denne studien kommer det frem flere eksempler på dette. Kommandoer som «skjæring mellom to objekter», «y=…», eller rett og slett inntastingen av selve funksjonsuttrykket er oftest brukt. På spørsmål om forklaringer til kommandoene var det flere som ikke klarte dette. Slik denne oppgaven indikerer, ser det ut til at elever som karakteriseres som svake brukte mer prosedyrerettede kommandoer i Geogebra, spesielt i de mekaniske og standardiserte oppgavene. Dette kan bidra til at de svake elevene opplever en positiv mestringsfølelse i faget, og mange elever tror dermed at de har forstått fenomenet. Både Anna og Julia støtter den antagelsen, og flere steder under intervjuet påpeker de at de ikke ville klart de første oppgavene uten å kunne støtte seg på Geogebra. Dette relateres til rote learning, som er en memoreringsteknikk basert på repetisjon, der det er ingen eller få forbindelser mellom kunnskapsbitene. De har med andre ord plassert seg i ARP-kolonnen, og er i stand til å løse bestemte oppgaver ved hjelp av oppskrifter, men klarer ikke umiddelbart å se hvorfor det de får frem stemmer. De er svært kontekstbundet, og overføringsevnen er lav. Når dette er sagt, bør likevel Geogebra sees på som en god mulighet til tilpasset opplæring i undervisningen. De sterke kan videreutvikle sine begrepskunnskaper, mens de andre kan få en tilpasset progresjon. Det finnes tegn på at i oppgavetyper der konteksten er kjent, kommer begrepskunnskapene tydeligere frem. Dette er diskutert i forskningsspørsmål 1.

De sterke elevene med begrepskunnskaper (RN), viser at de kan bruke prosedyrekunnskap (ARP, MS) effektivt og nøyaktig, som en tidsbesparende ressurs. Dermed kan de fokusere på andre viktige aspekter, som videre planlegging, forenkling av problemet og overvåking av prosedyrer. De klarer likevel å gi gode matematiske beskrivelser på sammenhenger (overførbarhet), og dette gjenspeiler viktigheten av koblingen mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Spesielt oversettelsen, og det å se sammenhengen mellom representasjonene (fleksibilitet), mener jeg er et godt eksempel på denne koblingen. Elevene har ikke bare en prosedyre for å komme fra den ene til den andre, men klarer å se representasjonene opp mot hverandre og bruke disse som løsningsstrategier i oppgaver. Det å kritisk vurdere svarene, ved blant annet dobbeltsjekk på tvers av representasjonene, viser også at elevene ser en tydelig sammenheng mellom dem.

Avslutningsvis vil jeg kort kommentere, at slik oppgavene er gitt her, vil de ikke isolert sett være med på å gi et riktig bilde av de kunnskapene som informantene viste. En samtale i etterkant vil være essensielt for å fange opp hvorvidt elevene har utviklet prosedyre- og/eller begrepskunnskap. Dette kan igjen relateres til det Skemp (1976) sa om vurdering av instrumentell og relasjonell matematikk (Skemp, 1976, s. 12).

6.2 Implikasjoner for undervisning

Hva kan funnene i denne masteroppgaven bidra med i forhold til utvikling av undervisning om lineære funksjoner? Det er helt klart at digitale hjelpemidler, slik som Geogebra, er kommet for å bli. I Stortingsmelding 22 (2010-2011) argumenteres det blant annet med at elever opplever mestring og motivasjon ved bruk av digitale medier, og at dette bør være et godt utgangspunkt for læring. Samtidig skal utforskning, eksperimentering, tolkning og oppdagelse støttes av digitale verktøy, både på skolen og hjemme (Kunnskapsdepartementet, 2011, s. 39-40). Dette er områder som er mulig å få til gjennom bruk av Geogebra. Som nevnt tidligere, støttet av både Persson (2010) og Dienes (1973), vil flere representasjoner samtidig kunne bidra til økte begrepskunnskaper, og en større helhetsforståelse. Dermed kan det være sentralt å bruke Geogebra (eller et annet digitalt hjelpemiddel) aktivt i innlæringen rundt og om funksjoners representasjonsformer. Dette kan skape både innsikt *i* og *om* de ulike representasjonene, slik at man også ser sammenhenger mellom dem, og ikke bare kan oversette mellom dem. Lignende metoder kan også være relevant å bruke for andre typer funksjoner enn lineære. Dette kan i tillegg fjerne den ubevisste bruken av representasjoner, for å komme fra en representasjon til en annen.

Selv om de digitale hjelpemidlene erstatter manuelt arbeid, vil jeg påstå at det er viktig at elevene også lærer dette. Hvis ikke kan det digitale hjelpemiddelet være en hvilepute, som fører til at mange elever ikke ser de store sammenhengene. En viktig ferdighet i matematikk, som i alle andre fag, er å kunne vurdere kritisk og ta veloverveide valg, samt delta i diskusjoner. Media fremstiller ofte sammenhenger som er basert på matematikk, og dersom elevene ikke kjenner til oppbygningen og fallgruvene i disse, kan de lett bli blendet av det som for andre er opplagte feil. Det er derfor viktig å ikke bare nøye seg med såkalt prosedyrekunnskap.

Det så ut til at de oppgavene med realistiske kontekster ga mer mening enn de standardiserte oppgavene, og sannsynligvis økt begrepskunnskap. Dette er et tankekors siden mange lærere, inkludert meg selv, ofte starter undervisningen med det vi tenker på som enkle tilfeller ($y = 2x + 2$), og som vanligvis ikke har røtter i den virkelige verden. Slik sett, kan det være fruktbart å ta utgangspunkt i virkelige kontekster og bygge begrepsapparatet ut fra dette. Dette støttes av blant annet Hiebert & Lefevre (1986) i form av at begrepskunnskap må læres meningsfullt, og av begrepet realistisk matematikkundervisning, slik Van den Heuvel-Panhuizen (1998) beskriver det.

Avslutningsvis vil jeg kommentere noe om oppgavesettets formuleringer. Oppgaver som ikke er designet for å vise begrepskunnskap, gjør heller ikke det. Dette er et viktig aspekt som lærere kan fokusere på. Jeg tror det er viktig å få elevene til å hele tiden forklare hva de gjør og hvorfor de gjør det, og at dette blir en arbeidsrutine. Dette støtter studien til Rittle-Johnson et al. (2001) som påpekte at elever som reflekterer rundt prosedyrer, fakta og begreper, lærer mer enn de som ikke gjør det. Dette kan også relateres tilbake til Brownell (1956) som argumenterte for at læreren måtte stimulere elevene til å hele tiden forklare *hvordan* og *hvorfor* ulike sammenhenger er som de er (Brownell, 1956, s. 131-133). For å få til dette, vil designet på oppgaven spille en rolle, og ikke minst hvordan læreren lærer opp elevene til å arbeide med matematiske oppgaver. I en hektisk arbeidshverdag er tiden knapp, men allikevel vil jeg påpeke viktigheten av å la elevene snakke om og forklare hvordan de har tenkt. Intervjudelen i denne avhandlingen viser tydelig at for å vurdere om elever ha begrepskunnskap, er man avhengig av å kommunisere med elevene på en annen måte enn hva oppgaver ofte legger opp til. Dette vises godt i tabell 4-1.

6.3 Veien videre

Denne studien antyder hvordan elever viser prosedyrekunnskap og begrepskunnskap etter endt undervisning om lineære funksjoner, og hvordan de bruker sine kunnskaper om Janviers (1978) representasjonsformer i dette arbeidet. En alternativ måte å angripe et tilsvarende prosjekt på, kunne vært å fokusere mer på faktorer som Star (2005) og Baroody et al. (2007) fremhever i sine artikler. I den forbindelse ville det vært aktuelt å skille mellom hva som betegnes som overfladisk og dyp kunnskap i en mer utvidet form. Jeg ønsket primært å fokusere på koblingen mellom kunnskapen, og derfor ble ikke disse faktorene prioritert i denne oppgaven. Allikevel ville en slik studie som tok for seg de utvidede formene, vært interessant å lese. Tabellen til Baroody et al. (2007) side 118 kan være et aktuelt utgangspunkt for en slik studie (vedlegg 6). I tillegg kan det være interessant å se på kjønnsforskjeller. Tradisjonelt tenker mange at det å sitte foran pc’en er en typisk gutteting. Hvilket kjønn presterer best med digitale hjelpemidler når man skal vurdere prosedyre- og begrepskunnskap, eller er det ingen merkbare forskjeller? Et mer omfattende arbeid ville vært å se på hvorvidt Geogebra bidrar til økt begrepskunnskap, utover det som allerede er kommet frem gjennom tidligere studier.

Litteraturliste

Alvesson, M. & Sköldberg, K. (2008). *Tolkning och reflektion. Vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod* (2. utg.). Lund: Studentlitteratur.

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bardini, C., Pierce, R. U. & Stacey, K. (2004). Teaching Linear Functions in Context with Graphics Calculators: Students' Responses and the Impact of the Approach on Their Use of Algebraic Symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 353-376. doi: https://doi.org/10.1007/s10763-004-8075-3

Barnard, T. & Tall, D. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. I E. Pehkonen (Red.), Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psychology og Mathematics Education, Vol. 2 (s.41-48). Hentet fra https://www.researchgate.net/profile/David_Tall/publication/239462742_Cognitive_Units_Connections_and_Mathematical_Proof/links/00b4952b36492357d3000000.pdf

Baroody, A. J., Feil, Y. & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131. doi: https://doi.org/10.2307/30034952

Borgan, Ø., Engseth, J., Heir, O. & Moe, H. (2014). *Matematikk Påbygging* (1 utg.). Skien: Aschehoug.

Brinkmann, S. & Tanggaard, L. (Red.). (2012). *Kvalitative metoder. Empiri og teoriutvikling*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Brownell, W. A. (1956). Meaning and skill - Maintaining the balance. *The Arithmetic Teacher, 3*(4), 129-142.

Chandler, P. & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology, 62*(2), 233-246. doi: https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1992.tb01017.x

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

De nasjonale forskningsetiske komiteer. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2011). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *The SAGE handbook of qualitative research* (4. utg., s. 1-15). Los Angeles: Sage.

Dienes, Z. P. (1973). *The six stages in the process of learning mathematics*. Windsor, Berks: NFER.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121. doi: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door Prof. *Dr. H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat [Speech by Prof. H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]*. *Euclides*, *52*, 336-338.

Halvorsen, K. (2008). *Å forske på samfunnet. En innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Oslo: Cappelen akademisk forlag.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Holt, J. C. (1964). How children fail. Vol. 5. Hentet fra http://gyanpedia.in/Portals/0/Toys%20from%20Trash/Resources/books/HCF.pdf

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments.* (Doktorgradsavhandling). Nottingham University, Nottingham.

Jerlang, E., Egeberg, S. & Sommer, V. (2000). *Utviklingspsykologiske teorier. En innføring* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. I S. Wagner & C. Kieran (Red.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (s. 167-194). Reston: VA: NCTM.

Kilpatrick, J. E., Swafford, J. E. & Findell, B. E. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (J. Teller, Trans.). Chicago: The University of Chicago Press.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet (midlertidig utg.,juni 2006).* Oslo: Kunnskapsdepartementet Hentet fra https://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Kunnskapsloftet_midlertidig_utgave_2006_tekstdel.pdf.

Kunnskapsdepartementet. (2011). *Motivasjon, mestring, muligheter*. (Meld. St.22, 2010-2011). Oslo: Kunnskapsdepartementet Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-22-2010--2011/id641251/.

Kvarv, S. (2014). *Vitenskapsteori. Tradisjoner, posisjoner og diskusjoner* (2. utg.). Oslo: Novus.

Long, C. (2005). Maths concepts in teaching: Procedural and conceptual knowledge. *Pythagoras, 62*, 59-65.

Lægreid, S., Skorgen, T. & Hagen, E. B. (2014). *Hermeneutisk lesebok*. Oslo: Spartacus.

Matematikksenteret. (2017). *Digitale verktøy til eksamen i matematikk.* Hentet fra (21.09.2017) http://www.matematikksenteret.no/content/4524/Digitale-verktoy-til-eksamen-i-matematikk.

Mortensen, E., Egeland, C., Gressgård, R., Holst, C., Jegerstedt, K., Rosland, S. & Sampson, K. (2008). *Kjønnsteori*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Nortvedt, G. A. & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli & F. Jensen (Red.), *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag,matematikk og lesing i PISA 2015* (s. 107-135). Oslo: Universitetsforlaget.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for research in mathematics education*, 21-40. doi: https://doi.org/10.2307/749716

Persson, P.-E. (2010). *Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå.* (Doktorgradsavhandling, Luleå tekniska universitet). Hentet fra http://muep.mau.se/bitstream/handle/2043/10665/R%C3%A4kna%20med%20bokst%C3%A4ver%20publikation.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Piaget, J. (1978). *Success and understanding*. Cambridge: MA: Harvard University Press.

Poggenpoel, M. & Myburgh, C. (2003). The researcher as research instrument in educational research. A possible threat to trustworthiness? (A: research_instrument). *Education, 124*(2), 418-423.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Rachlin, S. L. (1981). *Processes Used by College Students in Understanding Basic Algebra.* (Doktorgradsavhandling). The University of Georgia, Athen.

Rittle-Johnson, B., Alibali, M. W. & Pressley, G. M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175-189. doi: https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93*(2), 346-362. doi: https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Ronda, E. (2015). Growth Points in Linking Representations of Function: A Research-Based Framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*(3), 303-319. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9631-1

Ruyter, K. W. (2003). *Forskningsetikk. Beskyttelse av enkeltpersoner og samfunn*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26. Hentet fra https://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2016/01/Skemp-paper1.pdf

Solvang, R. (1992). *Matematikk-didaktikk* (2. utg.). Bekkestua: NKI.

Star, J. & Stylianides, G. (2013). Procedural and Conceptual Knowledge: Exploring the Gap Between Knowledge Type and Knowledge Quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13*(2), 169-181. doi: https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784828

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Teachey, A. L. (2003). *Investigations in conceptual understandings of polynomial functions and the impact of mathematical belief systems on achievement in an accelerated summer program for gifted students.* (Doktorgradsavhandling). North Carolina State

University, Raleigh, North Carolina. Hentet fra https://repository.lib.ncsu.edu/bitstream/handle/1840.16/4836/etd.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Thagaard, T. (2016). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tulving, E. (1983). *Elements of episodic memory*. New York: Oxford University Press.

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Funksjoner*. Hentet fra http://home.hit.no/~panderse/KIMhefter/ressursheftefunk.pdf (12.03.18)

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04.

Utdanningsdirektoratet. (2016). *Læreplan i matematikk fellesfag 2P-Y*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT6-03.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *Realistic Mathematics Education as work in progress*. Theory into practice in Mathematics Education. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences. Hentet fra http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/documents/Marja_Work-in-progress.pdf

Yin, R. K. (2007). *Fallstudier: Design och genomförande*. Malmö: Liber.

Zulnaidi, H. & Zakaria, E. (2012). The Effect of Using GeoGebra on Conceptual and Procedural Knowledge of High School Mathematics Students. *Asian Social Science, 8*(11), 102-106. doi: https://doi.org/10.5539/ass.v8n11p102

Vedlegg 1: Informasjon og samtykke

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

” En case-studie av fire elevers bruk av Geogebra i arbeidet med lineære funksjoner”

Du er invitert til å delta i denne undersøkelsen. Dette skrivet gir deg (og dine foresatte) nødvendig informasjon om det å delta.

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å prøve å få en oversikt over elevers forståelse om lineære funksjoner når de kan støtte seg på det dynamiske programmet Geogebra. Erfaringsvis viser det seg at flere elever på videregående nivå (*Påbygging til generell studiekompetanse*) strever generelt mye lineære funksjoner.

Under studien vil jeg prøve å se på hvordan du arbeider og tenker når du bruker Geogebra.

Prosjektets overordnede problemstilling vil være (pr. dags dato): «Hvordan viser elever forståelse av lineære funksjoner når de kan støtte seg på, eller benytte, Geogebra?»

Prosjektet er en mastergradsoppgave ved Høgskolen i Innlandet (avd. Hamar), under studiet «*Master i realfagenes didaktikk*».

Det er innhentet tillatelse fra skolen til å gjennomføre studiet.

Det vil i utgangspunktet delta fire elever i studiet.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Å delta i denne studien vil innebære at du skal arbeide deg gjennom noen oppgaver du skal løse - noen selvstendige, andre oppgaver der jeg kanskje spør og kommenterer underveis. Hele seansen vil bli videofilmet, og det er blant annet dette som skal brukes i analyse- og diskusjonsdelen i oppgaven. Det du viser på skjermen vil også bli tatt opp. Oppgavene du har gjort skal skrives ut, og sammen med filmen (og intervjuet) bli gjenstand for datamaterialet i oppgaven. Tidsbruk: ca 60 minutter. Det vil bli foretatt et individuelt intervju basert på det du har gjort i den foregående seansen (antageligvis dagen etter). Tidsperspektivet på intervjuet vil være ca. en halv time. Intervjuet vil bli videofilmet/ gjort lydopptak. Deltagelsen i prosjektet vil være nærmere jul (desember 2017) eller tidlig på nyåret (januar 2018).

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt, og bli anonymisert.

Det vil være undertegnede og veileder på masteroppgaven som vil ha tilgang på informasjonen som kommer frem. Videoene vil lagres digitalt (på PC og/eller minnepinne), men vil slettes umiddelbart etter prosjektets slutt (mai 2018). Videoopptakene vil bli transkribert (oversatt til tekst), men her vil det bli satt på fiktive navn under transkriberingen.

Deltagere vil ikke kunne bli gjenkjent under publiseringen av avhandlingen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.05.18. Videoopptak eller lydopptak vil bli slettet etter prosjektets slutt. Det som da er igjen vil være de fiktive navnene, som ikke under noen omstendigheter kan spores tilbake til deg. Prosjektet gjennomføres i henhold til Personvernombudets retningslinjer.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli slettet.

Har du videre spørsmål til studien, ta kontakt med Rune Hanserud på telefon 95791982, eventuelt epost: rune.hanserud@oppland.org. Du kan også kontakte veilederen for dette studentprosjektet Bjarte Rom på telefon 62517859 eller epost: bjarte.rom@inn.no

Studiet er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Med vennlig hilsen

Rune Hanserud
(Masterstudent, Høgskolen i Innlandet)

Samtykke til deltakelse i studien

Siden du er over 15 år, og denne studien ikke samler inn personsensitive opplysninger, kan du selv undertegne denne samtykkeerklæringen.

☐ Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta i prosjektet.

☐ Jeg har mottatt informasjon om studien, men ønsker ikke å delta i prosjektet.

Husk at du til enhver tid kan trekke tilbake samtykket ditt, uten begrunnelse

Navnet i blokkbokstaver:

____

Signatur: ____

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Bjarte Rom

2418 ELVERUM

Vår dato: 23.11.2017 Vår ref: 57020 / 3 / BGH Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 10.11.2017 for prosjektet:

57020	*En case-studie av fire videregående elevers bruk av Geogebra i arbeidet med lineære funksjoner*
Behandlingsansvarlig	*Høgskolen i Innlandet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Bjarte Rom*
Student	*Rune Hanserud*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 15.05.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Belinda Gloppen Helle

Kontaktperson: Belinda Gloppen Helle tlf: 55 58 28 74 / belinda.helle@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Rune Hanserud, rune.hanserud@oppland.org

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 57020

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Utvalget informeres skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet.

Personvernombudet vurderer at ungdommer som har fylt 15 år kan samtykke selv til å delta i dette prosjektet, så lenge de får tilpasset informasjon om prosjektet, og at det sørges for at de forstår at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg dersom de ønsker det.

REKRUTTERING
Personvernombudet legger til grunn at frivilligheten ivaretas og minner om at frivillighet kan være problematisk når en rekrutterer gjennom eget nettverk hvis det er et avhengighetsforhold mellom den som rekrutterer og informant, som for eksempel forholdet mellom lærer og elev. Videre forutsetter vi at lærerens taushetsplikt blir opprettholdt i rekrutteringsprosessen og at det er konfidensielt hvem som deltar i prosjektet.

DATAINNSAMLING

Vi minner om at ikke skal tas lyd- og/eller videopptak av andre elever enn de elevene som har samtykket til deltakelse i studien.

INFORMASJONSSIKKERHET

Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger Høgskolen i Innlandet sine interne rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING

Forventet prosjektslutt er 15.05.2018. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak

Vedlegg 3: Oppgavene elevene fikk

Oppgave 1 (prosedyrekunnskap)

Tegn de følgende funksjonene:

1. $y = x + 1$
2. $y = 2x - 2$
3. $y = -1 + 2x$

Oppgave 2 (prosedyrekunnskap)

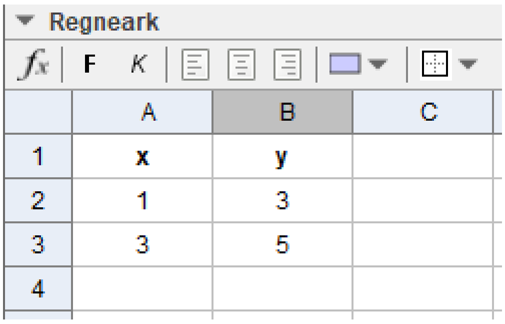
a) Bestem en verdi av x, slik at $y = 6$ i funksjonsuttrykket $y = 2x + 2$ Vis hvordan du kommer frem til svaret.

b) Hvor på x-aksen krysser grafen? Forklar hvordan du tenkte.

Oppgave 3 (prosedyrekunnskap)

Åpne regnearket i Geogebra. Skriv inn slik som bildet under viser.

Finn formelen/uttrykket til den rette linjen som går gjennom punktene. Begrunn hvordan du kom frem til svaret ditt.



Oppgave 4 (begrepskunnskap)

Russen skal ha et julebord, og russestyret kjøper inn pynt til bord og lokalet (servietter, lys, ballonger, julepynt etc.) for 500 kroner. Det skal serveres mat, og man regner med at prisen pr russ for maten er 150 kroner.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye festen koster (y kroner) når x elever kommer på festen. Forklar hvordan du tenker.

b) Tegn grafen, og les av hvor mye det koster dersom det kommer 50 russ. Forklar hvordan du tenker.

Oppgave 5 (begrepskunnskap)

En bil har en drivstofftank som rommer 60 liter. I gjennomsnitt bruker bilen 0,50 liter med drivstoff per mil. Vis hvordan det grafiske bildet av situasjonen blir seende ut (tegn en graf som passer til drivstoff-forbruket). Skriv en kommentar til grafen.

Oppgave 6 (begrepskunnskap)

En bedrift skal reduserer et utslipp jevnt fra 260 tonn til 60 tonn i løpet av ti år. Kall utslippet i tonn etter x år for $U(x)$.

a) Tegn grafen i Geogebra, og forklar hvordan du tenker gjennom prosessen.
b) Hvor stort bør utslippet være etter seks år?

En annen bedrift skal redusere utslippet fra 420 tonn til 200 tonn på fem år.

c) Etter hvor mange år vil disse to bedriftene har samme utslipp, og hva er utslippet da? Forklar hvordan du tenker og finner frem til svaret.

Vedlegg 4: Analyseverktøyet

Prosedyre-kunnskap	**Algoritmer, regler og prosedyrer (ARP)** Kan løse oppgaver ved hjelp av regler og prosedyrer, men vet ikke hvorfor det stemmer. Opparbeidet seg «oppskrifter» som strategier for å løse bestemte typer av oppgaver Svært kontekstbundet, og minimal eller ingen grad av overføringsevne – klarer ikke bruke kunnskapen og forståelsen videre Prøver seg frem. Ukritiske til egne svar Fakta Prosedyreflyt
	Det matematiske språket (MS) Symbolske representasjoner. Ser om noe er syntaktisk riktig oppstilt. Vet hvilke elementer som skal være med i et stykke for at det skal kunne løses, men ikke nødvendigvis hva de betyr (eks. å sette y=0). Selv om de ser at oppgaven er riktig oppstilt, er det ikke sikkert de klarer å løse (beregne) oppgaven.
Begreps-kunnskap	**Primært nivå (PN)** Stor grad av kontekstavhengighet Kan gi eksempler, kan generalisere, men på samme abstraksjonsnivå. Kan delvis forklare begreper og matematiske sammenhenger med egne ord
	Reflekterende nivå (RN) Ser kunnskapen og forståelsen utover oppgaven (konteksten), og kan effektivt bruke den andre sammenhenger (stor overføringsevne), og kan generalisere og forklare med egne ord Har evnen til fleksibilitet – eks. skifte mellom ulike representasjoner (fra et perspektiv til et annet) Har evnen til å reversere tankegangen (reversibilitet), og reflektere over hva som er gjort, og hva som bør gjøres videre/endres Kritiske til egne svar, og kan reflektere over om svaret kan stemme. Har evnen til å forutse noen konsekvenser, og gi argumenter for disse. Ser forbindelser mellom begreper og prosedyrer Beskrive karakteristikker og egenskaper til sammenhenger

Vedlegg 5: Transkriberingskoder

Transkriberingsnøkkel for intervjuene i masteroppgaven (intervjuene utført 10.januar 2018). Alle intervjuene har nummererte linjer som gjør det enkelt å finne de aktuelle stedene gjennom analysen og diskusjonen. Hver informant er intervjuet individuelt. Informantene er anonymisert og har fått tildelt fiktive navn.

L	= lærer/intervjuer (meg)
I	= Isak (intervjuobjekt)
J	= Julia (intervjuobjekt)
A	= Anne (intervjuobjekt)
M	= Max (intervjuobjekt)

Andre relevante koder jeg har brukt i transkripsjonen:

Tekst…	= ufullstendig setning [Eks: Jeg tror at dette betyr…]
Tekst…Tekst	= setningen avbrytes, og ny setning starter
Kursiv	= ord med betoning eller spesielt trykk i uttalen
Tekst – tekst – tekst	= ekstrainformasjon midt i en setning (innskutt)
Tekst – tekst	= forklaring eller utdyping av innholdet i setningen
(pause, …sek)	= informanten tar en pause, angitt med omtrentlig antall sekunder
(tekst)	= forklaringer/sinnelag/gester [Eks: ler, humrer, oppgitt, peker]
(…)	= Sensurering med hensyn på anonymiteten til deltagerne
[tekst]	= forklaring på ord som lett kan misforståes [Eks: stutt [kort]]
[…]	= deler av dialogen er utelatt (uinteressant)
Hel tekst i kursiv	= beskrivelser av situasjoner, gir et enklere bilde enn ved dialoger

Vedlegg 6: Tabellen til Baroody et al. (2007) s.118

Table 1
Efforts to Define Types and Qualities (Continua) of Procedural and Conceptual Knowledge

Knowledge type	Knowledge quality: Superficial	Knowledge quality: Deep	Reference
A. Procedural only	Surface-level rules (superficial step-by-step knowledge)	Deeper-level rules (serve to create or modify surface-level rules)	Matz, 1980
	Task-performing procedures	Procedural "operations that involve stepping outside of the system" (take place in a planning space that involves conceptual knowledge)	Davis, 1983
	Weak scheme (disembodied procedural knowledge)	Strong scheme (integrated procedural knowledge)	Baroody, 2003; Baroody & Ginsburg, 1986; Brownell, 1935; Moursund, 2002; Paden, n.d.
B. Conceptual only	Weak schema	Strong schema	Baroody, Cibulsksis, Lai,& Li, 2004; Baroody & Ginsburg, 1986; Baroody, Wilkins, & Tiilikainen, 2003; Lunkenbein, 1985
	Primary-level concept (less abstract)—tied to a specific context	Reflective-level concept (more abstract)—tied to multiple contexts	Hiebert & Lefevre, 1986
C. Both procedural and conceptual	Drill theory	Meaning theory	Brownell, 1935
	Instrumental understanding (rules without reason)	Relational understanding	Skemp, 1987
	Procedural or conceptual	Proceptual	Gray & Tall, 1994
	Knowing about—includes knowing how, that, and why	Knowing to—"active, practical knowledge that nables people to act creatively"	Mason & Spence (1999); cf. Skemp, 1979
	Routine expertise	Adaptive expertise	Hatano, 1988, 2003