Høgskolen i Innlandet

Fakultet for lærerutdanning og pedagogikk

Helene Olsen Fagerli & Stine Hopsdal Grøttveit

Masteroppgave

Elevers algebraiske tenkning og generaliseringsstrategier i arbeid med figurmønster på 4. trinn

Students Algebraic Thinking and Generalization Strategies when Working with Figure Patterns in 4th grade

MGLU 1-7 2018

2MASTER17

2023

Forord

Denne masteravhandlingen marker slutten på 5 år som studenter ved lærerutdanningen på Høgskolen i Innlandet. Det har vært spennende og lærerikt å skrive denne masteroppgaven, men samtidig til tider veldig krevende. Vi er veldig stolte over å ha skrevet en så stor oppgave, og er glad for at vi endelig kan si at vi er ferdigutdannede grunnskolelærere.

Vi vil gjerne rette en stor takk til vår veileder, Reinert Rinvold, for konstruktive tilbakemeldinger og god veiledning underveis.

Vi vil også takke våre medstudenter for 5 fantastiske år sammen og gode samtaler under skriveprosessen. Det har vært tungt det siste året, men vi klarte det! En takk går også til vår korrekturleser, Hanna.

Sist, men ikke minst må vi få takke skolen og elevene som ønsket å være med i vår studie. Det hadde ikke vært mulig å gjennomføre uten dere.

Hamar, mai 2023

Helene Olsen Fagerli & Stine Hopsdal Grøttveit

Norsk sammendrag

Temaet for denne masteroppgaven er generaliseringsstrategier og algebraisk tenkning. Det har vært undersøkt hvilke strategier elever benytter når de arbeider med figurmønsteroppgaver og hva det sier om deres algebraiske tenkning. Videre har det også blitt sett på hvordan elevenes strategier utvikler seg.

I denne undersøkelsen har det blitt brukt en kvalitativ tilnærming ved å bruke observasjon og videoopptak fra to undervisningsøkter, der elevene arbeidet med figurmønsteroppgaver. Ved å ta utgangspunkt i et rammeverk for generaliseringsstrategier og algebraisk tenkning, har det vært brukt teoretisk analyse for å besvare følgende problemstilling: *Hvordan arbeider elever på 4. trinn med figurmønsteroppgaver, og hvordan kommer den algebraiske tenkningen frem i de ulike generaliseringsstrategiene elevene benytter?*

Resultatene viser at elevene bruker flere forskjellige strategier, og ingen forholder seg til kun én strategi når de arbeider med en oppgave. Elevene bruker de erfaringene de har tilegnet seg fra en strategi når de går over til en annen strategi, for å komme seg videre i oppgaven. Det kom frem gjennom analysen at elevene gjerne startet med å bruke ikke-eksplisitte strategier, for å få en oversikt over figurmønsteret. De ikke-eksplisitte strategiene krever liten grad av algebraisk tenkning. Det var store variasjoner i hvilke strategier elevene gikk videre til etter de hadde brukt de ikke-eksplisitte strategiene, men kontekstuell strategi var den strategien som ble brukt i størst grad når elevene skulle finne figurtallet til figurer langt ut i mønsteret. Denne strategien innebærer høy grad av algebraisk tenkning.

Engelsk sammendrag (abstract)

The theme for this thesis is generalization strategies and algebraic thinking. It has been investigated which strategies students use when working with figure pattern tasks and what this says about their algebraic thinking. Furthermore, attention has also been drawn to how the students' strategies develop.

In this study, a qualitative approach has been used through observation and video recordings from teaching sessions where the students worked on figure pattern tasks. By starting from a framework for generalization strategies and algebraic thinking, theoretical analysis has been used to answer the following problem: How do students in the 4th grade work with figure pattern tasks, and how does algebraic thinking emerge in the various generalization strategies?

The results show that the students use several different strategies, and neither of the students used one strategy alone throughout an entire task. The students use the experience they have acquired from one strategy when they switch to another strategy, in order to proceed with the task. It emerged through the analysis that students usually started a task with the counting strategy or recursive strategy, in order to get an overview of the figure pattern. These two strategies require little algebraic thinking. There were great variations in which strategy the students used after they had used the non-explicit strategies, but contextual strategy was the strategy that was used to the greatest extent when the students had to find figures far out in the pattern. This strategy involves a high degree of algebraic thinking.

Innholdsfortegnelse

Figur- og tabelloversikt

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning

1.1 Bakgrunn og aktualitet

TIMSS-undersøkelsen (Trends in International Mathematics and Science Study) er en undersøkelse som blir gjennomført hvert 4. år med et mål om å styrke læring og undervisning i realfagene. Undersøkelsen måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 5. og 9. trinn, der rundt 60 land deltar. Et sentralt funn fra denne undersøkelsen er at innenfor matematikk presterer norske elever svakest i områdene tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2022). Fra TIMSS-undersøkelsen som ble gjennomført i 2019 kom det frem at elever på ungdomstrinnet scorer omtrent likt i matematikk i de tre nordiske landene. Til tross for dette presterer norske elever likevel signifikant lavere i algebra enn elever fra Sverige og Finland (Kaarstein et al., 2020). Norske elever har hatt en svak fremgang innenfor algebra fra 2015 til 2019. I 2015 fikk norske elever en poengsum på 471, som tilsvarer kompetansenivået lavt nivå. I 2019 ble den gjennomsnittlige poengsummen beregnet til 477, noe som gjør at de akkurat kvalifiserer til middels høyt nivå. Selv om norske elever har kommet høyere enn lavt nivå, er det bare noen få poeng som skiller fra lavt til middels høyt. Det betyr at algebra er et emneområde som bør jobbes mer med for å både holde seg på middels høyt nivå og forhåpentligvis bli bedre.

En forklaring på det lave resultatet i algebra kan komme av at elevene ofte blir introdusert for dette emnet relativt sent i skoleløpet (Grønmo et al., 2012, s. 26). Etter at Fagfornyelsen fra 2020 trådte i kraft, er det lagt til rette for at elever skal arbeide med algebraisk tenkning gjennom hele skoleløpet, og dette allerede fra 1. trinn. Dette kommer blant annet til uttrykk gjennom kjerneelementene som er utarbeidet i matematikk. I kjerneelementet «matematiske kunnskapsområder» blir algebra nevnt som et av områdene elevene skal ha opplæring i. Det blir også presisert at «algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk» (Utdanningsdirektoratet, 2020). På denne måten blir elevene forberedt på det som venter dem senere i skoleløpet.

Algebra er et emne som tidligere har tilfalt ungdomstrinnet. Forskerne English og Warren (1998) sier at elevers første møte med algebra tradisjonelt sett har vært en ligning med variabler som representerer noe ukjent. De sier også at denne tilnærmingen gir liten mulighet til å undersøke, utforske og se sammenhenger i algebra (English & Warren, 1998). I norske læreplandokumenter har man gått mer bort fra denne tilnærmingen. I fagfornyelsen fra 2020 er det lagt til rette for at elevene skal arbeide med algebra ved hjelp av uformelle konkrete aktiviteter, som å undersøke figur- og tallmønstre, formulere regler for å beskrive disse mønstrene og forsøke å generalisere situasjonen (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Committee on the Mathematical Education of Teachers of Mathematics (1991, referert i Bishop, 2000, s. 107) sier at på grunn av den teknologiske utviklingen har det kommet flere arbeidsplasser de siste tiårene som etterspør arbeidere som behersker matematikk godt, og har evnene til å utforske og resonnere logisk. I de senere årene har skolen vektlagt resonnering om mengder og kvantitative sammenhenger mer enn beregningsferdigheter (se Thompson & Thompson, 1995). Dette har ført til en ny interesse for undervisning og læring av algebra, som tilbyr begreper og språk, som gjør det enklere å resonnere rundt problemløsning (Bishop, 2000). Algebraisk kunnskap vil derfor være et viktig verktøy for elevene å besitte når de skal ta del i, og være en ressurs for et samfunn i stadig utvikling.

Flere forskere (Carraher et al., 2008; Lannin, 2005; Radford, 2010) mener at mønstergeneralisering er en god tilnærming til algebra. En av grunnene er at visuelle representasjoner fører til at det er lettere for elever å se sammenhenger i mønstre, og dermed utforme generelle matematiske uttrykk (Lannin, 2005). Dette er noe som for eksempel kommer inn under kompetansemålet «utforske og beskrive strukturar og mønster i leik og spel» på 4. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Vi ønsker å studere dette fenomenet fordi generalisering er en viktig del av algebraisk tenkning, og arbeid med figurmønster er ifølge flere forskere en god måte å jobbe med generalisering på barneskolen. Ettersom abstraksjon og generalisering har blitt en del av kjerneelementene i LK20, synes vi det hadde vært interessant å forske på hvordan dette kan gjøres på småtrinnet. En annen grunn til å forske på generalisering på småtrinnet er at elever på ungdomstrinnet scorer dårlig på algebra, og det vil derfor være en mulig hypotese at denne trenden kan endres ved å innføre generalisering tidligere i skoleløpet. Det finnes lite forskning om dette temaet på norske elever, og det hadde vært spennende å se om den tidligere forskningen fra andre land, samsvarer med resultatene fra denne studien. En norsk masterstudent, Mali Liberg Hønnås, har forsket på norske 9.trinnselever og deres generaliseringsstrategier og algebraiske tenkning i møte med figurtall i sin masteravhandling (Hønnås, 2022). Vi har latt oss inspirere av Hønnås sin masteravhandling, og ønsket å gjøre noe lignende med yngre elever. I likhet med Hønnås har vi benyttet oss av Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier, og ønsker å se om disse strategiene gjør seg gjeldene hos norske 4. trinnselever.

Vi er spesielt interessert i hvilke strategier elever på småtrinnet benytter seg av når de forsøker å generalisere. Grunnen til at strategiene til elevene er interessant å forske på, er at det kan gi lærere et innblikk i hvilke strategier som sannsynligvis vil møte dem i arbeid med mønstergeneralisering. Det gir også et innblikk i hvordan lærere kan få elever til å bruke ulike strategier til å oppnå resonnering, argumentasjon og generalisering. Elevene som forskes på i denne studien vil møte to ulike figurmønsteroppgaver som gir mulighet for bruk av ulike strategier. Vi vil også vurdere hva elevenes strategier sier om deres algebraiske tenkning og hvordan elevenes strategier utvikler seg.

1.2 Problemstilling

Forskerne i denne studien har valgt å studere problemstillingen ut fra et elevperspektiv. En av grunnene til dette er at når man studerer elever, ser man hva de faktisk gjør og kan knytte dette opp mot teori om generaliseringsstrategier og algebraisk tenkning. En fordel med å studere elevene fremfor å intervjue læreren om strategier elevene bruker er at læreren, i tillegg til å se på elevenes strategier, har mange andre oppgaver og fokusområder i lærerhverdagen. Lærernes fokus vil derfor ikke rette seg fullt mot elevenes strategier, og det vil være mulig at man kan få mer innsikt i elevenes faktiske strategier når forskerne retter oppmerksomheten spesifikt mot dette. I tillegg vil lærerens informasjon om elevenes strategibruk kunne ses på som en sekundærkilde til informasjonen vi vil samle inn. På bakgrunn av valg av tema er problemstillingen vår følgende:

«Hvordan arbeider elever på 4. trinn med figurmønsteroppgaver, og hvordan kommer den algebraiske tenkningen frem i de ulike generaliseringsstrategiene elevene benytter?»

Denne studien er den avsluttende delen av grunnskolelærerutdanningen for 1. – 7. trinn, og vi ser det som naturlig å studere barneskoleelever, ettersom det er dette nivået vi skal undervise på i fremtiden. Vi har valgt å studere elever på 4. trinn, fordi det er lite forskning om mønstergeneralisering på dette trinnet, spesielt i Norge, da algebra relativt nylig har kommet inn i læreplanen på barnetrinnet. Eldre elever vil ha bedre forutsetninger for å ta del i mer komplekse generaliseringsprosesser, likevel viser forskning at å innføre algebraisk tenkning på barnetrinnet vil gjøre overgangen til formell algebra enklere. Med tanke på modenhet og fremdrift i skoleløpet, tror vi at elever på 4. trinn vil kunne ta stor nok del i generaliseringsprosesser til at informasjonen vi får om deres strategier og algebraiske tenkning vil være nyttig.

I denne studien vil elevene arbeide med to oppgaver med figurmønstre som har lineær vekst. Det vil si at figur n kan uttrykkes som $an + b$ (Zazkis & Liljedahl, 2002, s. 380). Vi vil se etter hvilke strategier de benytter når de arbeider med oppgavene, og hva dette sier om deres algebraiske tekning. Vi kommer også til å se etter hvordan strategiene til elevene utvikler seg og hva som påvirker dette. Det er tidligere gjort forskning på elever som arbeider med figurmønster som har lineær vekst, men flertallet av disse er gjort i utlandet. Ettersom at TIMMS-undersøkelsen viser at norske elever scorer relativt dårlig i algebra, vil det være interessant å se hvordan arbeid med figurmønster vil fungere på en norsk skole.

1.3 Forskningsspørsmål

På bakgrunn av valg av problemstilling, relevant teori og forskning har vi utformet følgende tre forskningsspørsmål:

- Hvilke strategier bruker elever på 4. trinn når de arbeider med figurmønsteroppgaver?
- Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?
- Hvordan utvikles elevenes strategier?

I det første forskningsspørsmålet vil strategiene elevene benytter i generaliseringsprosessen sin bli analysert og drøftet opp mot et rammeverk for generaliseringsstrategier, utformet av Lannin (2005). Her vil også elevenes evner til å se generelle sammenhenger drøftes ut fra hver strategi. I det andre forskningsspørsmålet vil det bli drøftet i hvilken grad elevene tenker algebraisk når de benytter de ulike strategiene vi har identifisert i det første forskningsspørsmålet. I hvilken grad elevene har tenkt algebraisk drøftes opp mot Radford (2018) sine tre krav for algebraisk tenkning, som blir beskrevet i teorikapittelet 4.3.1. I det siste forskningsspørsmålet vil vi drøfte hvordan elevenes strategier utvikles, med tanke på at valgene de tar underveis i prosessen blir påvirket av flere faktorer.

1.4 Oppgavens oppbygning

Denne masteroppgaven er delt inn i syv hovedkapitler, som er innledning, tidligere forskning, metode, teori, analyse og resultatdel, drøfting og konklusjon.

I Kapittel 2, tidligere forskning, gjengir vi relevant forskning for temaet. I dette kapittelet presenterer vi hva forskere før oss har funnet, som vi vil drøfte opp mot de resultatene vi får i denne studien.

I Kapittel 3, metode, tar vi for oss metoden som er brukt til å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene. Rammeverkene vi bruker i denne oppgaven vil også bli presentert her.

I Kapittel 4, teori, gjør vi rede for teori som er relevant for denne studien. Dette innebærer blant annet teori om algebra og algebraisk tenkning, generaliseringsstrategier og figurmønster.

I Kapittel 5, analyse og resultatdel, presenterer vi det utvidede rammeverket som blir brukt for å analysere elevenes generaliseringsstrategier. Presentasjonene av våre funn og analysen av disse vil bli presentert under den oppgaven de tilhører. Her blir utdrag fra elevenes dialoger presentert og knyttet opp mot strategiene som er utarbeidet av Lannin (2005), i tillegg til Radford (2018) sine krav for algebraisk tenkning og Radford (2010) sin nivådeling av generalisering.

I Kapittel 6, drøfting, drøfter vi og diskuterer våre funn opp mot teori og tidligere forskning med hensikt om å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene.

I Kapittel 7, konklusjon, vil vi kort oppsummere hele oppgaven og konkludere med om problemstillingen og forskningsspørsmålene kan besvares med de resultatene vi har fått i denne studien.

2. Tidligere forskning

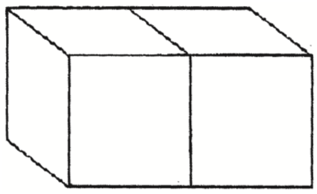
I dette kapittelet vil vi ta for oss tidligere forskning som har blitt gjort på feltet algebra og figurmønster. Innledningsvis presenterer vi artikkelen til Lannin (2005), ettersom denne studien har tatt utgangspunkt i hans rammeverk for generaliseringsstrategier som analyseverktøy. Vi ser det derfor som relevant å utdype mer om hans studie. Vi presenterer også kort andre studier som tar for seg strategier elever bruker i arbeid med figurmønsteroppgaver, blant annet Stacey (1989), Bishop (2000) og Lannin et al. (2006). Videre nevner vi også et par forskningsartikler som tar for seg algebraisk tenkning av Radford (2018) og Lee & Freiman (2006).

2.1 Lannin (2005)

John K. Lannin gjennomførte i 2005 en studie om resonnementene til 25 elever på 6. trinn i USA, da de arbeidet med mønsteroppgaver. Elevene skulle generalisere og begrunne funnene sine ved å bruke et regneark som et arbeidsverktøy. Under studien oppdaget Lannin at elevene var i stand til å gi passende generaliseringer når de diskuterte sammen i klassen, men når de arbeidet i mindre grupper manglet begrunnelsene for generaliseringene i større grad. Flere elever fokuserte heller på enkeltverdier, enn på helheten (Lannin, 2005).

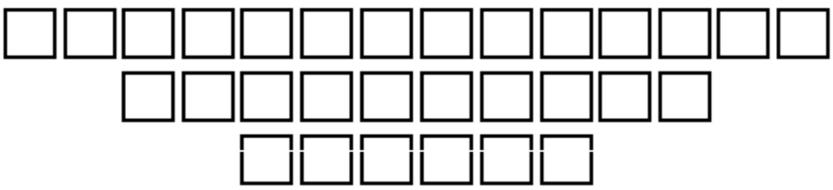
I sin studie benyttet Lannin seg av 4 forskjellige oppgaver, som skulle oppmuntre elevene til å generalisere. Hensikten med oppgavene var å få frem resonnementer fra elevene, og oppmuntre de til å reflektere over fordelene og ulempene med de ulike strategiene de benyttet. Oppgavene ble utformet slik at elevene arbeidet med relativt små tilfeller av den uavhengige variabelen, før de gikk over til større verdier.

Den første oppgaven elevene arbeidet med var *Cube sticker problem,* som er en figurmønsteroppgave med lineær vekst. Oppgavekonteksten er at en bedrift produserer rader ved å legge sammen kuber i en rad og bruker en klistremerkemaskin til å plassere smilefjes på hver synlige flate på kubene (se figur 1). Lannin sier at oppgaven ikke påpeker verken eksplisitte eller ikke-eksplisitte sammenhenger direkte, som gjør at elevene kan være fleksible i hvilke strategier de velger å bruke (Lannin, 2005).



Figur 1: Cube sticker problem

Den andre oppgaven elevene fikk var *Theater seats*, som også er en figurmønsteroppgave med lineær vekst. Her blir den rekursive sammenhengen eksplisitt nevnt i oppgaveteksten. Oppgaveteksten er som følger: I en teatersal er det 6 seter på første rad. Hver rad som kommer etter den første raden, har 4 flere seter enn raden før. Under er et diagram av de 3 første radene i teatersalen (Lannin, 2005, s. 257, vår oversettelse). I denne oppgaven blir elevene bedt om å finne ut hvor mange seter det er i noen bestemte rader. Lannin antok at denne oppgaven ville få elevene til å se sammenhengen mellom rekursive og eksplisitte sammenhenger.



Figur 2: Theater seats

De to siste oppgavene har vi valgt å ikke presentere i denne studien, da de ikke er relevante for vår studie. Disse oppgavene bygger ikke på en visuell representasjon, noe vi ønsker å bruke fordi Lannin (2005) sier at elever har større mulighet til å generalisere dersom konteksten er knyttet til en visuell representasjon.

Gjennom studien sin fant Lannin fem strategier, som han deler inn i kategoriene eksplisitte og ikke-eksplisitte strategier. De eksplisitte strategiene han oppdaget var hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi. De ikke-eksplisitte strategiene kalles tellestrategien og rekursiv strategi. Disse strategiene har vi valgt å bruke som rammeverk for vår studie og de blir nærmere forklart i kapittel 4.7.

2.2 Annen forskning på feltet

Kaye Stacey er en annen teoretiker som har forsket på strategier elever mellom 9 og 13 år bruker på lineære generaliseringsoppgaver. Resultatene fra studien viste at det var fire strategier elevene oftest benyttet seg av, og disse var tellestrategien, differanse strategien, hel-objekt strategien og lineær strategien. Hun fant også at mange elever benyttet seg av en variant av hel-objekt strategien der de adderte figurtallene til to figurnummer for å få det ønskede figurnummeret. Mange av strategiene som ble identifisert i denne studien har også blitt funnet i lignende forskning om figurmønstre. Bishop (2000) har funnet strategier hun har kalt for modell-, multiplikasjons-, proporsjonal- og uttrykksstrategiene, som samsvarer med Stacey (1989) sin tellestrategi, differansestrategi, hel-objekt strategi og lineær strategi.

Lannin et al. (2006) fant i sin forskning at elever beveger seg mellom flere strategier. Et av funnene i Lannin et al. (2006) sin studie er at elevene hadde et ønske om å være effektive i oppgaveløsningen, og at dette hadde betydning for hvilke generaliseringsstrategier de valgte. Ofte var grunnen til elevenes strategibytte at de oppdaget at strategien de benyttet ikke lenger var effektiv, og de søkte dermed andre mer effektive måter å løse oppgaven på. Stacey (1989) oppdaget at 64 % av elevene i studien hennes brukte mer enn en strategi for å løse en oppgave, og det var kun noen få som forholdt seg til én strategi gjennom hele arbeidsprosessen. Det som var mest vanlig blant elevene i undersøkelsen var at de begynte med en strategi, og senere benyttet seg av en annen strategi for å komme seg videre i løsningen av oppgaven (Stacey, 1989). I likhet med Lannin et. al (2006) og Stacey (1989) fant også Bishop (2000) at elevene ikke var konsekvente i strategibruken sin.

Både Lannin (2005) og Lannin et al. (2006) presenterer et rammeverk for generaliseringsstrategier, og det er både likheter og ulikheter med begge rammeverkene, selv om studiene er gjennomført med samme forsker og kun ett år mellom. I Lannin et al. (2006) ble det blant annet presentert en strategi de kaller for «chunking», som ikke blir nevnt i Lannin (2005). Denne strategien innebærer at elevene tar utgangspunkt i en allerede kjent figur, og bygger videre på denne med en rekursiv sammenheng. Et av funnene fra denne studien var at chunking strategien ofte ble brukt dersom rekursiv strategi var brukt tidligere. Rekursiv strategi og hel-objekt strategien er presentert i både Lannin (2005) og Lannin et al. (2006). I sistnevnte forskningsartikkel fant de ut at elever ofte brukte rekursiv strategi dersom de skulle finne en figur som var relativt nærme en figur de allerede hadde funnet. Et annet funn angående hel-objekt strategien, var at denne strategien ofte ble brukt i de tilfellene der elevene ikke hadde et godt nok visuelt bilde av figurmønsteret. Lannin et al. (2006) viser også til at en dobling av inngangsverdiene fra en figur til en annen, var en faktor som spilte inn på bruken av hel-objekt strategien.

Kontekstuell strategi er en del av rammeverket for generaliseringsstrategier hos Lannin (2005), men denne blir ikke inkludert i Lannin et al. (2006). Det blir derimot omtalt en strategi de kaller for eksplisitt strategi, som innebærer mange av de samme kjennetegnene for kontekstuell strategi. I denne studien ble det blant annet oppdaget at elevene ofte gikk over til å bruke den eksplisitte strategien om inngangsverdiene var vesentlig høyere enn de tidligere inngangsverdiene (Lannin et al., 2006, s. 7).

Flere forskere (Bishop, 2000; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989) har i sine studier funnet at hel-objekt strategien ofte fører til feil svar. Dersom figurmønsteret ikke vokser proporsjonalt, må elevene gjøre justeringer for å unngå over- eller undertelling. Bishop (2000), Lannin et al. (2006) og Stacey (1989) fant at mange elever ikke gjorde justeringer i slike tilfeller. I Bishop (2000) sin studie valgte hun oppgaver der en proporsjonalitetsstrategi ikke kunne benyttes uten justeringer. Likevel brukte 22 % av elevene en proporsjonalitetsstrategi, men majoriteten endte opp med feil svar da de ikke gjorde de nødvendige justeringene.

Radford (2018) presenterer resultater fra en longitudinell studie om utviklingen av symbolsk algebra hos yngre elever. Resultatene fra denne undersøkelsen kaster lys over overgangen fra ikke-symbolsk til symbolsk algebraisk tenkning i grunnskolen (Radford, 2018, s. 3). I studien fulgte Radford elevers generaliseringsprosess fra klassetrinn til klassetrinn. Han fant blant annet at elevene befant seg på et faktuelt generaliseringsnivå på 4. trinn, og bevegde seg videre til kontekstuelt generaliseringsnivå på 5. trinn. Det var først når elevene gikk på 6. trinn de nådde et symbolsk generaliseringsnivå. Radford (2018) fant også to typiske måter elever på 4. trinn så figurmønstre på. Ofte oppdaget de enten en rekursiv sammenheng i mønsteret, eller strukturen i mønsteret slik at de så det matematiske forholdet mellom to variabler. Det ble funnet at flere elever opplevde vanskeligheter med å uttrykke forhold i figurmønstre med naturlig språk, og det ble ofte brukt gester som peking for å henvise til deler av figurmønstrene. Etter at elevene fant ord for å henvise til deler av figurmønstrene ble peking også brukt for å understreke hva de mente.

Lesley Lee og Viktor Freiman gjennomførte i 2006 en studie som omhandlet utvikling av algebraisk tenkning gjennom mønsterutforskning. I studien blir det presentert flere spørsmål de anser som gode, som læreren kan stille elevene når de arbeider med figurmønster. Noen av disse spørsmålene har vi brukt i utformingen av figurmønsteroppgavene til denne masteroppgaven. De nevner blant annet et spørsmål som ber elevene om å tegne den neste figuren i mønsteret, som vi også har brukt i begge våre figurmønsteroppgaver. Dersom en elev tegner den neste figuren på tavlen, får de andre elevene mulighet til å se hvordan eleven tegner figuren. Her er det mulig at elevene ser mønsteret forskjellig, og de kan oppdage flere måter å se mønsteret på. Et annet spørsmål Lee & Freiman (2006) ser på som produktivt er å få elevene til å tegne en figur lengre ut i rekken, for eksempel figurnummer 10. Her vil noen elever kanskje klare å tegne den med en gang, etter å ha sett de første figurene i mønsteret, men de fleste elever vil kanskje føle behovet for å tegne alle figurene frem til den figuren de skal lage. Dersom man ber elevene om å finne en figur som er enda lengre ut i rekken, vil elevene gjerne føle behov for å finne en raskere fremgangsmåte å gjøre dette på. Mye av det Lee & Freiman (2006) presenterer i sin artikkel har vi tatt inspirasjon fra i utformingen av spørsmålene vi har stilt elevene det blir forsket på i denne oppgaven.

3. Metode

I dette kapittelet vil vi redegjøre for hvilken metode vi har valgt for å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene våre, og hvorfor vi ser på denne som mest hensiktsmessig for studien. Kapittelet presenterer også det vitenskapsteoretiske perspektivet, utvalget, og metodiske valg vi har foretatt i gjennomføringen av observasjon og analyse. I tillegg beskrives det hvordan vi har ivaretatt kvalitet og etiske hensyn i forskningen.

3.1 Vitenskapsteoretisk perspektiv

Når man skal forske på det som skjer i skolen, må man ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, s. 16) bruke samfunnsvitenskapelige forskningsmetoder. I samfunnsvitenskapelig metode studerer man den sosiale virkeligheten. Denne virkeligheten handler om samhandlingen mellom mennesker (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 21). I samfunnsforskning snakker man ikke om data som noe som er målt, men data vil her være en registrering av handlinger (se Kalleberg, 1996, s.41). Mennesker kan oppleve én og samme hendelse på ulike måter, og dataene som registreres er derfor avhengig av forforståelsen. Alle mennesker har kunnskaper og oppfatninger av virkeligheten og bruker ofte dette til å tolke omgivelsene ubevisst. Forskerens forforståelse vil derfor kunne påvirke hva den observerer, og hvordan den tolker og vektlegger disse observasjonene (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 22).

Samfunnsfenomener er mangfoldige og det betyr at man kan bruke mange forskjellige metoder for å samle inn data, avhengig av hva man ønsker å forske på (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 21). Denne studien har en kvalitativ tilnærming, som vil si at man utvikler en forståelse av de fenomenene man studerer. En slik tilnærming kan knyttes til fortolkende teorier som fenomenologi, hermeneutikk og symbolsk interaksjonisme. Den forståelsen vi utvikler i forskningsprosessen blir påvirket av den vitenskapsteoretiske fortolkningsrammen. Geertz (1973) fremhevet tidlig fortolkende tilnærminger, og la vekt på at kvalitative tekster skal inneholde «tykke beskrivelser» (s.10). Det betyr at teksten skal inneholde beskrivelser og tolkninger av de fenomenene vi analyserer (Thagaard, 2018, s. 19).

3.1.1 Hermeneutikk

Det hermeneutiske vitenskapsteoretiske perspektivet blir brukt i vår studie når vi forsøker å få innsikt i hvilke strategier elever benytter når de arbeider med figurmønsteroppgaver. Hermeneutikken vektlegger at menneskers handlinger kan fortolkes gjennom å fokusere på et dypere meningsinnhold enn det man ser ved første øyekast (Thagaard, 2018, s. 37). I denne studien tolker og analyserer vi elevenes gester, diskusjoner og arbeidsprosess for å få innsikt i hvilke strategier de bruker når de arbeider med figurmønsteroppgaver og hva det sier om deres algebraiske tenkning. I tolkningen og analysen er målet å gi «tykke beskrivelser» (Geertz, 1983), dette inkluderer uttalelser om hva elevene kan ha ment med handlingene sine og den fortolkningen forskeren har til dette (Thagaard, 2018, s. 37).

Hermeneutikken vektlegger at det ikke finnes en egentlig sannhet, men at man kan tolke fenomener på flere nivå. Grunntanken i et hermeneutisk vitenskapsteoretisk perspektiv er at fenomenet som skal studeres bare er forståelig om vi ser det i lys av den kontekst fenomenet er en del av (Thagaard, 2018, s. 37). Det er sammenhengen som gir fenomenet en bestemt mening, og gir forskeren de verktøyene den trenger for å kunne forstå det (Gilje & Grimen, 1993, s. 152).

Forbindelsen mellom det forskeren skal fortolke, forståelsen og konteksten det skal fortolkes i, er det man kaller den hermeneutiske sirkel. En dels fortolkning avhenger av helhetens fortolkning, og motsatt. På samme måte er fortolkningen av fenomenet avhengig av hvordan konteksten tolkes, og omvendt (Gilje & Grimen, 1993, s. 153). I denne studien kommer den hermeneutiske sirkelen til uttrykk gjennom hvordan vi fortolker de ulike strategiene, og at dette avhenger av hvordan konteksten fortolkes, og motsatt.

3.2 Kvalitativ metode

Innen samfunnsforskning skiller man i hovedsak mellom kvantitativ og kvalitativ metode. Et enkelt skille mellom disse er at kvantitativ metode avdekker at noe skjer, mens kvalitativ metode forklarer hvorfor noe skjer (Krumsvik, 2014, s. 113). I denne studien har vi valgt å benytte en kvalitativ metode. Det hadde selvfølgelig vært mulig å benytte en kvantitativ metode i form av et spørreskjema, der lærere ved ulike skoler gjennomfører de samme oppgavene med sine elever, og krysser av for hvor ofte de ulike strategiene forekommer. Dette ville gitt mulighet for å generalisere funnene mer, men samtidig ville denne metoden gitt flere feilkilder. Det kan være vanskelig å kategorisere hvilke strategier elever bruker, i tillegg til at lærere vil kunne kategorisere strategiene ulikt. Vi har derfor valgt å bruke kvalitativ metode for at leseren skal ha mulighet til å vurdere om vår tolkning og analyse av elevenes strategier gir et godt bilde av virkeligheten. Det er også nødvendig med en viss grad av kvalitativ analyse for å avdekke de ulike strategiene elever benytter seg av når de arbeider med figurmønsteroppgaver.

Når forskere bruker kvalitativ metode er det viktig å ha i bakhodet at man nærmer seg sin forskning med utgangspunkt i et allerede etablert verdenssyn eller i et paradigme. Det vil si at man har med seg antagelser eller et syn på verden som vil styre eller rettlede forskningen. Teori og metode vil ofte styre og rettlede forskningen (se Postholm, 2010, s. 33). I kapittel 2, teori, presenterer vi kjennetegn på algebraisk tenkning og typiske strategier elever bruker når de arbeider med generalisering av figurmønster, og disse vil være styrende for vår forskning. I kvalitativ forskning er kunnskapen og dannelsen av forståelse etablert gjennom sosiale interaksjoner mellom forsker og informanter. Ifølge Postholm (2010) er all kvalitativ forskning utført innenfor et konstruktivistisk paradigme (s. 33). Det er tre begreper som sier noe om kvalitativ forskning og forskerens rolle i slike studier, disse kalles *ontologi*, *epistemologi* og *aksiologi*.

Ontologi handler om hvordan virkeligheten oppfattes. Virkeligheten blir konstruert eller skapt av de personene som er med i studien (Postholm, 2010, s. 33). Virkeligheten vi forsøker å beskrive i denne studien er de strategiene som elevene benytter seg av i arbeid med figurmønsteroppgaver, og hva dette sier om deres algebraiske tenkning. Epistemologi handler om forholdet mellom forskeren og informantene. I kvalitativ forskning vil det gjerne oppstå et nært samarbeidsforhold mellom forskeren og de personene som står i fokus for forskningen. I dette samarbeidet vil virkeligheten som det forskes på, bli skapt (Postholm, 2010, s. 34-35). Vårt forhold til informantene er derfor viktig å reflektere over, og dette står det mer om i kapittel 3.8 (analysemetode) og 3.9 (kvalitet i forskning). Aksiologi vil si læren om verdier. Et kjennetegn ved kvalitative studier er at de er verdiladet. Det er viktig at en kvalitativ forsker er klar over at man er påvirket av sin egen subjektivitet under hele forskningsprosessen. Det er derfor nødvendig at forskerens subjektive syn kommer frem i studien, slik at leseren kan få innblikk i hvordan dette kan ha påvirket forskningsarbeidet (Postholm, 2010, s. 35). Våre synspunkter og begrunnelser vil tydelig komme frem gjennom hele oppgaven. Dette blir også nærmere drøftet i kapittel 3.9 (kvalitet i forskning).

3.3 Forskningsdesign

Et forskningsdesign har som hensikt å beskrive retningslinjene for hvordan forskeren tenker å gjennomføre et prosjekt. Disse retningslinjene inneholder beskrivelser av hva studien skal sette søkelys på, hvem som deltar, hvor undersøkelsen gjennomføres og hvordan den gjennomføres (Thagaard, 2018, s. 50).

Denne studien av elevers strategibruk og algebraiske tenkning, er basert på observasjoner av elever som løser oppgaver i fellesskap som omhandler figurmønster. Studien tar utgangspunkt i tre grupper med tre til fire elever per gruppe. Alle tre gruppene gjennomførte opplegget på samme tidspunkt. I forkant av datainnsamlingen ble det gjennomført en introduksjonsøkt for å bygge relasjoner med elevene, og introdusere dem for arbeid med vertikale tavler. Introduksjonsøkten er beskrevet i kapittel 3.6. Datainnsamlingen foregikk over to dager, der vi gjennomførte en arbeidsøkt per dag sammen med elevene. Elevene ble presentert for to ulike figurmønsteroppgaver, der de jobbet med én oppgave per økt. Oppgavene elevene arbeidet med under observasjonen blir presentert og beskrevet i kapittel 5.2 og 5.3.

Vi benyttet oss av videoopptak, der vi filmet tavlene elevene skrev på og deres interaksjoner med hverandre. I tillegg støttet vi oss på egne observasjoner, noe som gir oss flere detaljer under elevenes arbeid. Videoopptakene og observasjonsnotatene ble gjennomgått i etterkant. Tavlene elevene skrev på ble også samlet inn og brukt som støtte i analysen.

3.4 Observasjon

Krumsvik (2014) definerer observasjon som «systematisk overvåking av adferd eller tale i naturlige situasjoner» (s. 142). I denne studien har vi valgt å bruke observasjon som metode for å få detaljerte beskrivelser av menneskers aktiviteter, atferd og handlinger (Johannessen et al., 2021, s. 79). Dette ble sett på som mest hensiktsmessig, fordi det er elevenes algebraiske tenkning og deres bruk av generaliseringsstrategier som skal studeres. Når man bruker observasjoner i forskningen sin kan man studere sosiale situasjoner, slik de utspiller seg (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Mennesker befinner seg stadig i settinger der man observerer andre mennesker og omgivelser rundt seg, ved hjelp av sansene sine. Dette gjør man også i forskning, men denne observasjonen må være mer systematisk. I en systematisk observasjon beskriver man hvem som skal observeres, hvilke situasjoner de observeres i, og når observasjonen foregår (Johannessen et al., 2021, s. 80). Hvem som blir observert er beskrevet i kapittel 3.5 (utvalg) og konteksten for observasjonen er beskrevet i kapittel 3.7.

I noen tilfeller får man ikke kunnskap om en naturlig situasjon uten observasjon. Det kan være utfordrende både å huske kunnskap og å formulere kunnskap med ord. I tillegg er det forskjell på hva man sier at man gjør, og hva man faktisk gjør (Johannessen et al., 2021, s. 82). Dette er en av grunnene til at vi valgte observasjon fremfor intervju. En stor del av observasjonene vi har gjort er fanget opp på video, noe som gjør det lettere å få et klarere bilde av det som skjer ved at vi kunne gå tilbake i videomaterialet om det var ting som var uklart. Problemstillingen vår går ut på å avdekke hvilke strategier elever bruker når de arbeider med figurmønster og hva dette sier om deres algebraiske tenkning, og i en intervjusituasjon kan man risikere at elevene forteller det de tror forskeren vil høre (Thagaard, 2018, s. 108). Ved bruk av observasjon trenger man ikke spørre elevene hva de ville gjort hvis de fikk en oppgave, fordi resultatene vil vise hva elevene faktisk gjør. Vi valgte derfor observasjon for å sikre studiens reliabilitet. Likevel er det vanskeligere å få innsikt i elevenes tanker og begrunnelser for hva de gjør ved observasjon enn intervju. Vi har fått innsikt i en del av elevenes tanker og begrunnelser ved hjelp av oppfølgingsspørsmål underveis, men det blir likevel begrenset i forhold til en intervjusituasjon. Dette skyldes at man ikke har mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål til alle elevene under en observasjon.

I denne studien har vi en deltakende observasjon. Deltakende observasjon vil si at forskeren er ute i felten og deltar i aktiviteter sammen med de som blir forsket på. Det finnes ulike roller man kan påta seg når man skal gjennomføre en deltakende observasjon. Den første er fullverdig deltaker, som vil si at forskeren holder observasjonsrollen sin skjult for deltakerne for å ikke forstyrre aktiviteten som foregår. Den andre rollen er deltaker som observatør, det vil si at deltakerne er kjent med at forskeren observerer, og dette er en underordnet deltakerrolle. Den tredje er observatør som deltaker, der observasjonsrollen til forskeren er kjent for deltakerne, men deltakingen til forskeren er sekundær til rollen som informasjonsinnsamler. Den siste er fullverdig observatør, som betyr at forskeren er skjult for de som forskes på (Krumsvik, 2014, s. 144). I denne studien tok vi rollen som observatør som deltaker, der deltakerne er kjent med og har samtykket til at de blir observert gjennom et samtykkeskjema.

Ifølge Thagaard (2018) får vi etablert oss i felten ved at vi utøver oppgaver vi har kompetanse i, og som blir akseptert av deltakerne (s. 70). I vårt forskningsprosjekt leder vi elevene i en generaliseringsprosess, som blir akseptert av elevene fordi vi inntar en lærerrolle. Som deltakende observatør har forskeren mulighet til å prate med deltakerne den møter i felten. Dette kan gi oss informasjon om meningen deltakerne tillegger sine handlinger og gjøremål (Thagaard, 2018, s. 70). Thagaard (2018) kaller dette for feltsamtaler, fordi de foregår samtidig som vi er en del av miljøet vi studerer. I slike samtaler får elevene mulighet til å begrunne valgene de gjør underveis, som gir oss mer informasjon om strategiene de bruker når de løser en oppgave. Vi får også mulighet til å skaffe oss et dypere innblikk i elevenes algebraiske tenkning.

Videoobservasjon er en metode som gir en unik mulighet til å se på detaljer i en sosial interaksjon. En fordel med å bruke video er at man får en detaljert gjengivelse, som ikke er tolket, av det som skjer i en situasjon. Det er likevel viktig å ta hensyn til at kameravinkel, hvor mye kamera fanger opp av situasjonen og kvaliteten på bilde og lyd, sier noe om hvor korrekt gjengivelse av situasjonen vi får. Vi må derfor betrakte videomaterialene vi får som en av mange representasjoner av situasjonen. Uansett vil videomaterialet være en mer komplett og detaljert gjengivelse av situasjonen, enn om den ble observert uten kamera (Tjora, 2017, s. 103). Det er også viktig å ta i betraktning at elevene kan komme til å oppføre seg annerledes enn de ville gjort i en naturlig setting, når de er klar over at de blir filmet. Videokameraene er også hele tiden synlig for elevene, noe som vil kunne påminne dem om at de blir observert og derfor kanskje opptre annerledes.

3.5 Utvalg

I kvalitative observasjonsstudier representerer utvalget personer, og det er som oftest et begrenset antall informanter. Ettersom utvalget i denne studien er lite, er det spesielt viktig at vi benytter en utvelgelsesprosess som er hensiktsmessig for problemstillingen. Hensikten er at analysen av dataene skal kunne gi en forståelse av fenomenet vi studerer (Thagaard, 2018, s. 54). Studien vår ble gjennomført med til sammen 12 elever, som ble delt i tre grupper på tre til fire elever per gruppe. Det ble gjort et utvalg blant de elevene som fikk informert samtykke fra foresatte. Dette lot vi elevenes matematikklærer gjøre, og det ble satt sammen grupper med elever som ville fungere godt sammen. En gruppe ble bestående av tre elever og de to andre gruppene bestod av både tre og fire elever. I utgangspunktet hadde vi tenkt at vi skulle ha fire grupper med tre elever på hver gruppe, men på grunn av sykdom ble dette endret til tre grupper. Vi så oss derfor nødt til å ha noen grupper med fire elever, slik at det ikke ble for få elever på en gruppe.

På grunn av at vår erfaring fra skolen i hovedsak er fra barneskolen, og at det er på dette nivået vi skal arbeide på i fremtiden, var det naturlig å gjennomføre undersøkelsen på 4. trinn. Algebra kan være utfordrende å jobbe med, og vi tenkte det var viktig å velge et trinn på barneskolen som ville være i stand til å arbeide med slike oppgaver. Hvor vi gjennomførte forskningen vår, var også avhengig av hvilke skoler som sa seg villig til å delta.

3.6 Introduksjonsøkt

Før vi begynte datainnsamlingen gjennomførte vi en introduksjonsøkt med elevene som hadde meldt seg til å delta i studien. Introduksjonsøkten varte i en time, i likhet med øktene som danner grunnlaget for vår observasjon. Vi valgte å ta elevene gjennom en introduksjonsøkt i forkant for å gjøre dem kjent med undervisningsmetoden som blir brukt i datainnsamlingen. Elevene jobbet i grupper med vertikale tavler, noe de ikke har jobbet mye med før. Det var derfor viktig for oss at elevene fikk prøvd ut å skrive på en vertikal tavle, der de må samarbeide om hvem som skal skrive og hva de skal skrive på tavlene. Vi erfarte også i introduksjonsøkten at enkelte av elevene ikke ønsket at andre (både forskerne og elever fra andre grupper) skulle se hva de skrev før de følte seg ferdig. Dette var noe de fikk øvd seg litt på i introduksjonsøkten, og vi erfarte at de ble mer villige til å vise frem arbeidet sitt underveis i prosessen i de påfølgende øktene. Både introduskjonsøkten og undervisningsoppleggene som blir brukt i datainnsamlingen er utformet etter Liljedahl (2021) sine prinsipper, og disse vil bli nærmere forklart i kapittel 3.7. En introduksjonsøkt vil også være en fin måte å skape en relasjon med elevene, slik at det vil kunne oppleves tryggere for dem under datainnsamlingen og observasjonen.

I introduksjonsøkten arbeidet elevene med fire oppgaver. Innholdet i oppgavene var ikke et fokusområde i denne økten, og er heller ikke relatert til figurmønster. Målet med økten var å la elevene arbeide med oppgaver som gjør dem kjent med å diskutere sammen i grupper og benytte vertikale tavler i tankeprosessene sine. Oppgavene elevene fikk presentert i denne økten er det Liljedahl (2021) omtaler som «highly engaging thinking tasks», som er oppgaver som er så engasjerende at man ikke kan gjøre noe annet enn å tenke. Disse oppgavene kan brukes på tvers av flere trinn og brukes for å forberede elevene på mer typiske læreplanoppgaver (Liljedahl, 2021, s. 21). Ettersom oppgavene i seg selv ikke er relevante for vår studie, blir de ikke presentert i denne avhandlingen.

3.7 Beskrivelse av undervisningssituasjonen

Vi har observert to undervisningsopplegg og vil i dette kapittelet beskrive undervisningssituasjonen og valgene som ble gjort i utformingen av undervisningsoppleggene. Vi har tatt inspirasjon fra Peter Liljedahl (2021) sitt arbeid. Liljedahl presenterer 14 praksiser som han mener vil generere mer tenkning i matematikkundervisningen. Denne praksisen har vi sett flere lærere ta i bruk de siste årene, og på bakgrunn av dette lar vi oss inspirere av enkelte av disse praksisene.

Vi har valgt å dele elevene inn i grupper på tre, noe Liljedahl mener er den optimale gruppestørrelsen. Gruppeinndelingen ble gjort av elevenes matematikklærer, fordi den har god kjennskap til elevene og hvem som arbeider godt sammen. I undervisningsoppleggene våre vil elevene arbeide stående foran vertikale tavler. Disse tavlene henger på veggen foran hver gruppe, og elevene har hele tiden mulighet til å viske bort ting de har skrevet for å gi plass til nye ideer. Denne måten å arbeide på har vi valgt fordi Liljedahl mener at elevene tør å prøve ut forskjellige fremgangsmåter når de har muligheten til å viske det bort, dersom de skriver noe feil (Liljedahl, 2021, s. 61). Det at tavlene er vertikale gjør det enklere for oss å se hvor elevene befinner seg i tenkningen sin, og hvilke strategier de bruker. De vertikale tavlene kan også gjøre det lettere for elevene å samarbeide, da alle på gruppen kan se hva som blir skrevet til enhver tid. Grunnen til at elevene står under arbeidet er fordi Liljedahl påpeker at når elever sitter føler de seg anonyme, og det er større sannsynlighet for at de ikke bidrar i arbeidet (Liljedahl, 2021, s. 61-62).

En annen praksis Liljedahl nevner er når, hvor og hvordan oppgaver blir gitt. Liljedahl fant ut at om en oppgave blir gitt sent i en undervisningsøkt, fører det til mindre tenkning enn om den blir gitt i starten av økten. Vi har derfor valgt å presentere oppgavene for elevene innen de første 3-5 minuttene, slik Liljedahl mener er det mest optimale (Liljedahl, 2021, s. 103). Liljedahl mener også at det har betydning hvor elevene befinner seg når man gir en oppgave. Hvis elevene sitter ved pultene sine når de får en oppgave, vil det for eksempel være med på å skape et passivt miljø for elevene. I kontrast vil elever som står rundt læreren når de får utdelt en oppgave, skape et mer energisk og aktivt miljø (Liljedahl, 2021, s. 103). Oppgavene ble presentert muntlig fordi Liljedahl mener at dette skaper mer tekning, og man unngår mange unødvendige spørsmål knyttet til oppgaveteksten. På den digitale tavlen i klasserommet hadde vi likevel illustrasjoner av figurene, ettersom poenget med å uttrykke en oppgave verbalt ikke er å huske detaljer, men å få elevene til å tenke mer på hva de faktisk skal gjøre (Liljedahl, 2021, s.105).

Oppgavene som danner grunnlaget for undervisningen, blir presentert i sin helhet i analysekapitlene 5.2 og 5.3. I kapittel 5.2 beskrives bordproblemet. Dette er en oppgave som har blitt brukt av flere ulike forskere innen mønstergeneralisering (se for eksempel Carraher et al., 2008; Earnest & Balti, 2008). Elevene fikk først i oppgave å finne ut hvor mange personer det er plass til rundt 4 bord. Videre skulle de finne ut hvor mange det er plass til rundt 6 bord. Elevene fikk så i oppgave om å finne ut hvor mange personer som kan sitte rundt 20 og 50 bord. Neste oppgave var å finne ut hvor mange bord de trengte dersom 30 elever kom på klassefesten. Til slutt fikk de i oppgave å lage en regel for hvor mange personer det er plass til rundt et hvilket som helst antall bord. I arbeid med denne oppgaven stod elevene helt fritt i å velge hvordan de ville løse den.

Kapittel 5.3 tar for seg oppgaven «det voksende mønsteret». Mønsteret er inspirert av en oppgave Lee & Freiman (2006) bruker i sin studie, og noen av spørsmålene vi stiller elevene er også inspirert fra deres forskning. Den første oppgaven elevene fikk var å tegne den neste figuren i mønsteret. Her får elevene mulighet til å se hvordan en elev tegner den neste figuren på tavlen. Det kan hende at elevene ser mønsteret forskjellig, og de kan oppdage at det finnes flere måter å se mønsteret på (Lee & Freiman, 2006). Videre skulle de finne ut hvor mange blå sirkler figurnummer 8 og 25 består av. Her er det mulig at noen elever klarer å lage figuren med en gang, på grunn av at de har sett de fire første figurene i mønsteret allerede, men noen vil fortsatt tegne figurnummer 5-7, før de kan lage figurnummer 8. For å eventuelt få elevene til å bruke en mer effektiv fremgangsmåte, skulle de finne figurnummer 25. Denne deloppgaven ble valgt ut for at elevene skulle føle behovet for å finne en raskere fremgangsmåte for å løse oppgaven på, enn å lage alle figurene som kommer før (Lee & Freiman, 2006). Deretter fikk de i oppgave å forklare hvordan man kan finne ut antall sirkler i en hvilken som helst figur. Til slutt ønsket vi å se om elevene klarte å forklare hvordan man kan finne ut antall sirkler i figur *n*. Elevene fikk velge selv hvordan de ville løse oppgaven.

Begge figurmønsteroppgavene vil gå under kompetansemålet «utforske og beskrive strukturar og mønster i leik og spel» etter 4. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020). Gjennom begge undervisningsoppleggene vil elevene også arbeide med de seks kjerneelementene i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Bordproblemet og det voksende mønsteret ble valgt ut fordi de har en lav inngangsterskel, noe som gjør at alle elevene har mulighet til å delta. Alle elever vil kunne være med å undersøke figurtallene. De fleste vil kunne se hvordan mønsteret vokser, og mange kan delta i en samtale om sammenhengen mellom figurnummer og figurtall, men det er ikke sikkert alle vil kunne generere en formel med algebraisk notasjon. Uansett vil alle elevene kunne føle på at de har deltatt i den matematiske utforskningen (Karlsen, 2014, s. 64). Dette er viktig for oss for å skape motivasjon for elevene, slik at vi kan få innsikt i strategiene deres.

3.8 Analysemetode

Analysen betegner prosessen der forskeren undersøker datamaterialet etter svar i lys av problemstillingen og forskningsspørsmålene. Ifølge Johannessen et al. (2018, s. 22) gjør dette at forskerens oppmerksomhet blir mer rettet mot hva man leter etter i datamaterialet. Med en økt oppmerksomhet blir det lettere å sortere hva som er relevant og ikke for studien.

På grunn av at vår studie skal se på hvilke strategier elevene bruker når de arbeider med figurmønster og hva dette sier om deres algebraiske tenkning, vil det være nødvendig å ha en grad av kvalitativ analyse. Dette er for å kunne avdekke de ulike strategiene. Innenfor kvalitativ analyse er det vanlig å skille mellom en deskriptiv og teoretisk analyse. Når man benytter kvalitative analysemetoder er det nødvendig å sortere og redusere dataene man har samlet inn, slik at materialet blir forståelig. En slik form for analyse, der datamaterialet blir strukturert ved hjelp av koding og kategorisering, kaller Postholm (2010) for en deskriptiv analyse (s. 91). Teoretisk analyse vil si at forskeren benytter seg av teorier den har tilegnet seg i forkant av undersøkelsen, sammen med sine erfaringer og opplevelser når den analyserer datamaterialet. Ettersom forskerens subjektive tanker og meninger er en stor del av kvalitativ metode, gjenspeiler dette seg også i hvordan man analyserer resultatene. Det er derfor viktig at forskeren er bevisst på dette, og forsøker å møte datamaterialet med et mest mulig åpent sinn når det analyseres (Postholm, 2010, s. 99).

Datamaterialet vårt består av seks videoopptak, elevenes skriftlige arbeid og egne notater som ble gjort underveis. Videoopptakene våre vil vise både handlinger og samtaler mellom elevene, og for å systematisere og kategorisere dette har vi valgt å transkribere disse. Når det transkriberes fra muntlig til skriftlig form, blir samtalene strukturert slik at de passer bedre til å analyseres (se Kvale & Brinkmann, 2015, s. 206). Vi har valgt å skrive ordrett det som blir sagt, i tillegg til å notere gester, peking og andre relevante handlinger med en asterisk (*). Postholm (2010) påpeker viktigheten av at ordlyden av informantenes ytringer blir gjengitt korrekt (s. 150). Transkripsjonene, elevenes arbeid og egne notater vi tok underveis dannet utgangspunkt for analysen. I utdrag fra elevenes utsagn vil de bli betegnet med fiktive navn og vi betegnes som lærer. For å begrense datamaterialet har vi kategorisert resultatene etter analyseredskapet som blir presentert i kapittel 3.8.1 og 5.1. Datamaterialet har også blitt gjennomgått på nytt etter at analysen og drøftingen ble skrevet, for å være sikker på at kategoriseringen ble riktig.

Etter at datamaterialet ble kategorisert har vi drøftet resultatene ved hjelp av teoretisk analyse for å forstå helheten i resultatene. Her legger teorien, sammen med forskerens mening og forforståelse, grunnlag for å analysere datamaterialet som ble registrert. Dataene vi registrerte vil også påvirke forskernes subjektive meninger og bruk av teori. Denne gjensidige påvirkningen kalles den hermeneutiske sirkel (Gilje & Grimen, 1993, s. 153).

3.8.1 Rammeverk

For å analysere hvilke strategier elevene har brukt valgte vi å ta utgangspunkt i Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier. Grunnen til at vi valgte å bruke dette rammeverket er fordi vi gir elevene et figurmønster som ligner et av figurmønstrene Lannin gir til elevene i hans studie. Det er derfor sannsynlig å anta at flere av strategiene i rammeverket vil bli brukt av våre informanter. Flere av strategiene Lannin beskriver, finner vi også hos andre forskere på feltet, som gjør at vi har større grunn til å tro at elevene i denne studien vil ta i bruk disse strategiene. Vi vil også påpeke at vi er klar over at andre strategier, som ikke blir presentert i dette rammeverket, kan bli brukt av elevene. En tykkere beskrivelse av strategiene i rammeverket finnes i teorikapittelet 4.7, generaliseringsstrategier.

Tabell 1: Elevers generaliseringsstrategier

Strategi	**Beskrivelse**
Ikke-eksplisitte strategier	
Tellestrategien	Eleven tegner et bilde eller en modell av situasjonen, og teller ønskede egenskaper ut fra dette.

Rekursiv strategi	Eleven ser på tidligere figurer i mønsteret og bruker disse til å regne seg frem til neste figur. Dette blir brukt for å generalisere en formel.
Eksplisitte strategier	
Hel-objekt strategien	Eleven bruker prinsippet om proporsjonalitet og tar utgangspunkt i en allerede kjent verdi. Elevene kan ta i bruk multiplikasjon eller divisjon for å regne seg frem til hvor mange elementer det er i en større eller mindre figur. Denne strategien kan føre til over- eller undertelling.
Prøve og feile strategien	Eleven prøver seg frem med ulike tall fra problemkonteksten og tester ut forskjellige operasjoner med disse. Eleven kan også gjette på formler uten noen begrunnelse på hvorfor denne kan fungere.
Kontekstuell strategi	Eleven konstruerer en formel ut fra den informasjonen som blir oppgitt i oppgaven. Denne informasjonen kombineres med en telleteknikk.

For å analysere elevenes algebraiske tenkning er det mange ulike rammeverk og forskere vi kunne valgt å støtte oss på, og en del av disse forskerne er presentert i teorikapitlene 4.2 og 4.3. Vi har valgt å bruke Radford (2018) og Radford (2010) for å analysere den algebraiske tenkningen som fremkommer i vårt datamateriale. Grunnen til at vi velger å bruke Radford sine rammeverk er fordi han er en anerkjent forsker innen algebraisk tenkning, og at han er en av dem som ikke anser alfanumerisk notasjon som verken et krav eller en indikasjon på algebraisk tenkning. I avsnittene under har vi kortfattet Radford (2018) sine tre krav for algebraisk tenkning og Radford (2010) sine generaliseringsnivå. En mer omfattende beskrivelse av rammeverkene finnes henholdsvis i teorikapittel 4.3.1 og 4.6.

For å analysere elevenes algebraiske tenkning tar vi utgangspunkt i Radford (2018) sine tre krav for algebraisk tenkning:

1. bruk av ubestemte kvantiteter (mengde eller størrelser)
2. representasjoner for ubestemte kvantiteter og operasjoner med dem
3. forholder seg analytisk til disse (1 og 2)

I tillegg vil vi bruke Radford (2010) sine generaliseringsnivå for å analysere den algebraiske tenkningen til elevene:

1. faktuell generalisering, de ubestemte kvantitetene blir ikke navngitt, men det benyttes ofte konkrete tilfeller av en variabel i mønsteret for å uttrykke en regel.
2. kontekstuell generalisering, de ubestemte kvantitetene blir navngitt knyttet til konteksten.
3. symbolsk generalisering, de ubestemte størrelsene og operasjonene man gjør med dem blir uttrykt ved alfanumerisk notasjon. På dette nivået må man kunne beskrive regelen, forklare variabelen og konstante tall i uttrykket. For å kunne si at noen befinner seg på et symbolsk generaliseringsnivå må de kunne beskrive hvordan man finner ut antall elementer i en hvilken som helst figur, med algebraiske symboler.

3.9 Kvalitet i forskning

Forskeren regnes som den med den mest signifikante rollen når det kommer til å sikre kvaliteten på forskningen (Postholm, 2010, s. 136). Som forsker må man selv vurdere og reflektere over kvaliteten på forskningsarbeidet. Det er vanlig å vurdere kvaliteten på egen forskning med utgangspunkt i begrepene reliabilitet og validitet (Gleiss & Sæther, 2021, s. 201). I tillegg er det nyttig for forskeren å vurdere sin egen og studiens objektivitet.

3.9.1 Reliabilitet

Reliabilitet kan også kalles pålitelighet og handler om hvorvidt studien er til å stole på eller ikke (Gleiss & Sæther, 2021, s. 202). Kvale og Brinkmann (2015) sier at reliabilitet dreier seg om forskningsresultatenes konsistens og troverdighet (s. 276). De mener altså at man må vurdere om det er mulig å reprodusere resultatet fra undersøkelsen på andre tidspunkter av andre forskere. Dette omtaler Postholm og Jacobsen (2018) som «test-retest», og sier at dette blir sett på som den ultimate testen på reliabilitet (s. 223). I kvalitative studier vil det være vanskelig å få samme resultat dersom man gjennomfører en studie flere ganger. Dette er fordi samhandlingen mellom forskeren og informanter vil være påvirket av tid og sted, fordi mennesker hele tiden er i utvikling. I tillegg tar ofte forskeren med seg sin subjektive mening inn i forskningen (se Postholm, 2010, s. 169). For å ivareta en studies reliabilitet i kvalitativ forskning sier Postholm og Jacobsen (2018) at forskeren bør reflektere over egen påvirkning og gjøre forskningsprosessen tilgjengelig for andre, slik at de kan reflektere over den (s. 224). Det innebærer å beskrive forskningsprosessen fra start til slutt så grundig at andre kan følge de samme fremgangsmåtene i nye studier. Dette er med på å styrke studiens faglige reliabilitet. For å ivareta studiens reliabilitet har vi forsøkt å gi grundige beskrivelser av hvordan vi har gjennomført vår forskning. Det er også viktig å bemerke at vår tilstedeværelse og ledelse av undervisningen vil kunne ha påvirket elevenes arbeid. For å forsøke å minske denne påvirkningen, valgte vi å gjennomføre en introduksjonsøkt slik at elevene ble vant til at vi ledet dem i en arbeidsprosess. Introduksjonsøkten er beskrevet i kapittel 3.6.

3.9.2 Validitet

I kvalitative undersøkelser handler validitet om i hvilken grad funnene og fremgangsmåtene reflekterer formålet med undersøkelsen, og om disse representerer virkeligheten på en sannferdig måte (Johannessen et al., 2021, s. 256). Validitet deles ofte inn i to typer: indre og ytre. Indre validitet handler om det vi kommer frem til og om de konklusjonene som ble trukket, er gyldig for de eller det vi har studert (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223). Indre validitet handler blant annet om hvor godt begrepene og teorien vi benytter oss av passer til å beskrive den virkeligheten vi påstår at vi studerer og analyserer (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). Dette handler om hvorvidt metoden er egnet til å undersøke det studiens intensjon er å undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Spørsmålet om hvor gyldige begrepene vi bruker er, kan vi kalle begrepsmessig gyldighet. For å gi leseren mulighet til å bedømme at begrepene gir meningsfulle abstraksjoner av empirien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 230), må forskeren gi «tykke beskrivelser» (Geertz, 1983, s. 47). I teorikapittelet har vi derfor presentert strategiene som blir brukt til å kategorisere elevenes strategier grundig, slik at leseren har mulighet til å bedømme om begrepene beskriver det elevene faktisk gjør. Kravene vi har brukt for å vurdere elevenes algebraiske tenkning blir også presentert i teorikapittelet. Postholm & Jacobsen (2018) sier også det er viktig at de det forskes på kjenner seg igjen i begrepene som blir brukt (s. 230). Ettersom våre informanter er elever, som ikke får eksplisitt opplæring i hva de ulike strategiene innebærer, vil det ikke være verken relevant eller nødvendig å avklare begrepene med dem.

Ytre validitet handler om at resultatene fra et forskningsprosjekt skal kunne overføres til lignende kontekster (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 238). All forskning tilstreber å kunne trekke slutninger over de opplysningene som samles inn. I kvantitative undersøkelser er det enklere å gjøre statistisk generalisering av funn fra et utvalg til en populasjon (Johannessen et al., 2021, s. 257). I kvalitativ forskning er ikke dette like enkelt, fordi undersøkelsene er basert på et mindre utvalg som ikke kan sies å være representativt (Gleiss & Sæthre, s. 207). Vår studie baserer seg på et utvalg på 12 informanter, noe som regnes som «et mindre utvalg» av alle norske elever som går på 4. trinn. Selv om informasjonen vi får fra denne undersøkelsen ikke kan sies å være representativ, kan det likevel ha overføringsverdi ved at andre lærere kan kjenne igjen strategiene som blir brukt. I vår forskning er ikke hensikten bare å få innsikt i hvilke strategier elever benytter når de arbeider med figurmønsteroppgaver på en bestemt skole, men også å få kunnskap som kan brukes til å forstå hva som kjennetegner flere elevers strategibruk og algebraiske tenkning.

I spørsmål om validitet er det ifølge Befring (2015) viktig å vurdere om andre faktorer kan ha påvirket resultatene (s. 51). Når vi skal undersøke hvilke strategier elevene bruker, vil oppgavens utforming kunne påvirke dette. Enkelte figurmønsteroppgaver legger til rette for bruk av spesifikke strategier. For eksempel vil en oppgave der man tydelig ser forrige figur i den neste, ofte føre til at elever tar i bruk rekursiv strategi (Lannin et al., 2006). I tillegg vil læreren, som i dette tilfellet er forskeren, kunne påvirke elevenes strategibruk og algebraiske tenkning ved hjelp av hint og veiledning undervis. I forkant av datainnsamlingen hadde vi en tanke om å prøve å være bevisst på hvilke hint som ble gitt, slik at det ikke skulle lede elevene inn på en spesifikk strategi. Vi erfarte likevel underveis at det i noen tilfeller var nødvendig for læreren å gripe inn og gi støtte og hint underveis i oppgaveløsningen. Dette ble blant annet gjort for å sikre elevenes fremdrift, og for å unngå misoppfattelser. Spesielt ved bruk av hel-objekt strategien ble det nødvendig å få elevene til å forstå at man ikke kunne bruke denne strategien uten justeringer, slik at de ikke ville fortsette å bruke strategien i den tro at det ble riktig.

Det faktum at elevene ble filmet mens de arbeidet kan også ha påvirket elevene. Dette så vi særlig i starten av første undervisningsopplegg, der enkelte så bort mot kameraet før de pratet. Etter litt tid virket det som om elevene tenkte mindre på dette, da de snakket mer fritt og enkelte deltok mer i gruppesamtalen enn de hadde gjort i starten. Ved å reflektere over valg av metode og hvilke styrker og begrensninger den har, kan man styrke studiens validitet. Validiteten kan styrkes ved at man sammenligner resultater med tidligere forskning

(Gleiss & Sæther, 2021, s. 205). I denne masteroppgaven har vi drøftet våre funn opp mot tidligere forskning på feltet.

3.9.3 Objektivitet

I kvalitative studier må forskeren være klar over at man alltid vil ha med seg en forut-forståelse som kan påvirke forutsetningene for objektivitet (Befring, 2015, s. 54). Det er derfor viktig at forskeren beskriver alle beslutningene som ble tatt under hele forskningsprosessen, slik at leseren kan følge det som ble gjort og vurdere hvorvidt forskeren forholder seg objektiv. Forskeren er nødt til å være kritisk til hvordan prosjektet ble utført og kommentere skjevheter eller avvik, fordommer og oppfatninger som kan ha påvirket fortolkningen og tilnærmingen i undersøkelsen (Johannessen et al., 2021, s. 259). Dette kan føre til forskningsetiske utfordringer ved kravet om personlig integritet. Det er derfor viktig å opplyse om hva som er informantenes egne handlinger og utsagn, og hva som er forskerens tolkninger av dette (Befring, 2015, s. 55). Informantenes handlinger og utsagn er tydelig markert med fiktive navn og linjenummer i analysekapittelet og våre tolkninger av dette blir beskrevet i tydelige avsnitt under hver dialog.

3.10 Etiske overveielser

Det er utarbeidet en rekke forskningsetiske retningslinjer man må forholde seg til når man skal forske. Disse retningslinjene er normer for vitenskapelig redelighet, og er utarbeidet av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2021).

I studier som benytter seg av deltakende observasjon som metode, vil det oppstå en nær kontakt mellom forskeren og informanter. Dette gjør at forskeren innhenter data som kan knyttes til personene som deltar i prosjektet. Ifølge personopplysningsloven er forskningsprosjekter som behandler personopplysninger meldepliktige (Personopplysningsloven, 2018). Denne studien er godkjent av kunnskapssektorens tjenesteleverandør (Sikt) og gjennomført i tråd med deres retningslinjer.

NESH sine retningslinjer kan oppsummeres i tre typer hensyn forskere må tenke gjennom. Disse er informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser av å delta i forskningsprosjekter (se Thagaard, 2018, s. 22).

3.10.1 Informert samtykke

Ifølge NESH skal et samtykke være «frivillig, informert og utvetydig, og det bør være dokumenterbart» (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2021, s. 18). Informert samtykke er utgangspunktet for et hvert forskningsprosjekt. «At samtykket er *informert*, betyr at forskere har gitt tilstrekkelig og forståelig informasjon om hva det innebærer å delta i forskning» (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2021, s. 19). Det vil si at de som skal undersøkes er klar over hvilke farer og gevinster det medfører å delta. De som har deltatt i denne undersøkelsen har fått et skriftlig informasjonsskriv om studien. Det er også et krav at deltakerne har evne til å vurdere konsekvenser og ta egne valg (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247). Ettersom vi skal studere barns strategibruk og deres algebraiske tenkning må de foresatte vurdere konsekvenser og gi samtykke på vegne av barnet, fordi de ikke har kompetanse til å ta en slik avgjørelse selv. I denne studien har de foresatte gitt samtykke på vegne av deres barn. Samtykkeskjemaet gir opplysninger om hva det skal forskes på, og hva det innebærer for deltakerne å delta i prosjektet (se vedlegg 1). En viktig del av informert samtykke går ut på at deltakerne når som helst skal kunne trekke sin deltakelse i studien (Postholm, 2010, s. 146). Gjennom samtykkeskjemaet som ble sendt ut fikk de foresatte informasjon om muligheten til å trekke sitt samtykke, og hvordan de kunne gjøre dette.

3.10.2 Konfidensialitet

Det andre grunnprinsippet for at forskningen skal kunne regnes som etisk ansvarlig, er kravet om konfidensialitet. I forskning vil konfidensialitet si at man skal verne om deltakernes privatliv og sikre deres anonymitet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 106). Dette er også lovfestet i forvaltningsloven, som sier at all informasjon som kan spores tilbake til en person er taushetsbelagt (Forvaltningsloven, 1970, § 13). For å verne om deltakernes privatliv har vi brukt pseudonymer i stedet for elevenes ekte navn. Dette ble også gjort for at forskeren og leseren ikke retter oppmerksomheten mot spesifikke personer, men fokuserer på de generelle mønstrene i dataene (Thagaard, 2018, s. 24-25). Informasjon om hvilken skole vi har gjennomført undersøkelsen på blir heller ikke oppgitt. I vår studie har vi ikke håndtert spesielt sensitive personopplysninger. Den eneste informasjonen vi innhentet om informantene våre er deres navn, alder og hvilken skole de går på. Så fort datainnsamlingen var fullført ble informantenes navn byttet ut med fiktive navn, som ble brukt når dataene ble analysert videre. Når forskningsprosjektet vårt er avsluttet vil alle videoopptakene bli slettet, og samtykkeskjemaene som inneholder navn på deltakerne og deres foresatte vil bli makulert.

3.10.3 Konsekvenser av å delta i forskningsprosjekter

Et tredje grunnprinsipp er å overveie hvilke konsekvenser deltakeren kan ha av å delta i et forskningsprosjekt. Den som skal forske har ansvar for å vurdere hvilke konsekvenser studien kan ha. Dette dreier seg om å ta stilling "[...] til den mulige skade den kan påføre deltakerne, og de fordeler de kan forventes å få ved å delta i undersøkelsen» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 107). En mulig konsekvens for elevene som deltar i denne studien er at de vil gå glipp av ordinær undervisning. Undervisningsoppleggene vi gjennomfører i studien vil likevel være utformet i henhold til kompetansemålene i læreplanen, og det vil derfor være en del av kompetansen det er forventet at elevene skal oppnå. For å minimere konsekvensene elevene får ved å ikke delta i ordinær undervisning, fikk også de resterende elevene på trinnet tilbud om å gå gjennom det samme undervisningsopplegget. På denne måten fikk de muligheten til å oppnå det samme læringsutbyttet.

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) skal forskeren reflektere over mulige konsekvenser både for de som deltar i undersøkelsen og for den større gruppen de representerer (s. 107). Vi har studert et lite utvalg av elever som går på 4. trinn, og man kan derfor ikke si at studien er representativ til å gjelde for alle norske 4. trinnselever. Dette taler for at det sannsynligvis ikke vil få noen særlige konsekvenser for gruppen informantene våre representerer. Likevel er det mulig å tenke at mange av strategiene og måten å tenke algebraisk på som oppdages i en klasse, også vil forekomme i andre klasser på samme trinn. Derfor kan noen lærere generalisere våre resultater, slik at det får konsekvenser for hvordan de veileder elevene i strategibruk når de arbeider med mønstergeneralisering. Dersom vi for eksempel finner at elevene i denne studien når et høyere nivå av algebraisk tenkning når de bruker en spesifikk strategi, kan dette påvirke andre lærere til å fremme denne strategien for sine elever.

4. Teori

I dette kapittelet vil vi presentere teori som er relevant for denne oppgaven. Kapittelet gjør rede for sosiokulturell læringsteori og ulike syn på algebra og tidlig algebra. Det blir også presentert hva som ligger i begrepene algebraisk tenkning, generalisering og figurmønster. Kapittelet tar også for seg ulike generaliseringsstrategier og krav for algebraisk tenkning, som vil bli brukt som rammeverk i analysen.

4.1 Sosiokulturell læringsteori

Hvordan skal man undervise i figurmønster og hvordan skal man forholde seg til elevenes evne til å lære det som læreren ønsker at de skal oppnå? Det finnes flere teorier om hvordan barn og unge lærer og hvordan deres kognitive utvikling foregår. En av disse teoriene er sosiokulturell læringsteori. Denne oppgaven handler om hvilke strategier elever bruker når de arbeider med figurmønster og hva dette sier om deres algebraiske tenkning, og vi ser det som grunnleggende å redegjøre for denne teorien da elevene arbeider sammen i grupper.

I pedagogikken skiller man gjerne mellom ulike læringsteorier, som beskriver hvordan læring og undervisning tolkes. De ulike læringsteoriene har også ulike syn på hvilke faktorer som anses som viktige for å fremme læring. I dette kapittelet vil vi redegjøre for relevant teori om sosiokulturell læringsteori, og hvordan språk og samhandling blir sett på som viktig for læring i den sosiokulturelle læringsteorien.

4.1.1 Den sosiokulturelle læringsteorien og Vygotsky

Säljö (2005/2006, s. 19) fremhever mennesket som et historisk og sosialt vesen, og for å forstå hvordan et menneske lærer eller utvikler seg må vi se individets kunnskaper og ferdigheter i sammenheng med dets omgivelser og de ressurser og utfordringer som finnes der. Det som omtales her er det sosiokulturelle læringsperspektivet, som har sitt opphav fra Vygotsky.

Vygotsky (1978) mente at man må ta i betraktning hvilken rolle ulike tegn og redskaper har i menneskets handlinger, for å forstå og forklare mentale ferdigheter. Slike mentale ferdigheter kan være å huske, løse problemer og andre viljestyrte handlinger (Säljö, 2005/2006; Vygotsky, 1978, s. 24). Vygotsky illustrerte denne ideen med en trekant. Han brukte begrepene «redskaper» og «mediering» for å beskrive prosessen der mennesker er i interaksjon med den sosiale omverden. Det som er sentralt i Vygotsky sin teori er at de ulike redskapene virker som et hjelpemiddel i samspillet med omverdenen (Säljö, 2005/2006; Vygotsky, 1978). Det er når vi tar i bruk de medierende redskapene vi skaper mening og betydning av vår omverden.

Ifølge sosiokulturell læringsteori er språket et viktig redskap for å utvikle forståelse (Vygotsky, 1978, s. 25). Språket er et redskap vi bruker til å tilegne oss kunnskap og kultur, og det bidrar til at vi inkluderes i det sosiale fellesskapet i både tanke og tale. Helt fra vi er små tilegner vi oss kunnskaper og ferdigheter gjennom å lytte, snakke og samhandle med andre mennesker (Dysthe, 2001, s. 49). Den viktigste funksjonen til språket er kommunikasjon. Ifølge Vygotsky sorterer vi tankene våre om ulike ting når vi utfører språklige handlinger. En språklig handling er en handling man utfører med ord, og det står sentralt når vi kommuniserer med andre mennesker. En forutsetning for å kunne dele tankene våre med andre, er å gjøre om tankene våre til språk (Øzerk, 1996, s. 99). Vygotsky mente at språket var tenkningens sosiale redskap, og at språk og tale blir sett på som viktige mentale funksjoner hos mennesker. Samtidig er disse med på å forme andre mentale funksjoner (Øzerk, 1996, s. 101).

Språket anses som en viktig form for redskap, og samtaler mellom mennesker anses som en viktig del av læringsprosessen (Säljö, 2005/2006, s. 32). Samtaler er et uttrykk for mediering, der deltakerne i samtalen fungerer som medierende ressurser for hverandre. Deltakerne i samtalen kan tilpasse seg hverandre og samordne sin forståelse, og tankemåter og resonnering som fremkommer i samtalen kan bli tatt i bruk av de andre deltakerne (Säljö, 2005/2006, s. 36). Derfor er det naturlig å studere samhandling mellom mennesker når de arbeider med oppgaver, for å oppnå kunnskap om individets arbeid med oppgaven.

I tillegg til å tilegne seg kunnskap som deles i samtalen, konstruerer individet også sin egen kunnskap ved å dele sin resonnering i en kulturell praksis. Vygotsky (1978) omtaler denne prosessen som en internaliseringsprosess, der individet konstruerer kunnskap ut fra deltagelse i sosiale praksiser. Læring blir forstått som et spørsmål knyttet til hvordan individet nyttiggjør seg kunnskaper og ferdigheter som de eksponeres for. Det er viktig å ta hensyn til situasjonen der læringen foregår, da kunnskap og læring er situert i sosiale praksiser (Säljö, 2005/2006, s. 16-19). Derfor må man undersøke og beskrive situasjonen der læringen foregår, og hvordan individet samspiller med og benytter seg av medierende redskaper som en del av fokuset.

Vygotsky (1978) mener at for å oppnå læring må man bestemme to utviklingsnivå (s. 85). Det første nivået er det eleven allerede behersker, og kalles elevens faktiske utviklingsnivå. Hvis man for eksempel bruker kartleggingstester, vil resultatene svare til det utviklingsnivået eleven behersker på egenhånd. Det andre utviklingsnivået handler om elevens potensielle utvikling. Det går ut på hva eleven kan klare å løse i samspill med læreren, eller i samarbeid med elever som befinner seg på et høyere nivå. Det eleven kan løse i samspill med andre kaller Vygotsky (1978) den proksimale utviklingssonen (s. 86). Når eleven får utfordringer som ligger i sin proksimale utviklingssone og arbeider med utfordringene sammen med lærer eller elever som befinner seg på et høyere utviklingsnivå, vil den proksimale utviklingssonen flytte seg. De utfordringene som ligger i den proksimale utviklingssonen en dag, vil senere bli utfordringer som ligger i elevens faktiske utviklingsnivå (Vygotsky, 1987, s. 87). Elevene utvikler derfor læring i samspill med andre.

4.2 Algebra og tidlig algebra

I denne studien vil vi blant annet analysere elevenes algebraiske tenkning i arbeid med figurmønster. Vi ser det derfor som nødvendig å inkludere teori om hva algebra er, og hva som skiller algebra fra tidlig algebra. Algebra blir ofte introdusert med hvordan man løser ligninger, funksjoner og manipulering av bokstavuttrykk (Kieran, 1990). Flere forskere mener at mønstergeneralisering regnes som den beste måten å introdusere algebra til elever (Kaput, 2008; Lannin, 2005; Radford, 2010). Algebra er vanligvis det folk har i tankene når de tenker på matematikk som et språk: en lang rekke av algebraiske symboler. Det er imidlertid viktig å vite at en rekke av algebraiske symboler i seg selv ikke er algebra. Det kan være vanskelig å definere algebra, fordi det ikke bare er én enkelt ting, men omhandler gjerne mange aspekter ved matematikken. I skolesammenheng handler algebra om å bruke symboler for å uttrykke og manipulere generaliteter i tallkontekster (Mason, 1996).

Flere matematikklærere anerkjenner at algebra bør undervises på de lavere trinnene, men å flytte algebra slik som det fleste av oss ble lært det til barneskolen kan by på utfordringer. Mange har opplevd algebra som vanskelig og meningsløst, kanskje som et resultat av dårlig undervisning (Carraher et al., 2007). Dersom algebra virker meningsløst i ungdomsårene, hvorfor skal det være hensiktsmessig å introdusere det flere år tidligere? Tidlig algebra skiller seg fra den algebraen vi kjenner igjen fra ungdomsskolen og utover, ved at den i stor grad bygger på bakgrunnskontekster for problemer. I tidlig algebra blir formell notasjon gradvis introdusert og det flettes tett sammen med tidligere emner fra matematikken (Carraher et al., 2007).

Blanton et al (2018) fant ut gjennom sin studie at elever på de lavere trinnene kan engasjere seg i aktiviteter som krever algebraisk tenkning. De skriver følgende om algebra på lavere trinn: «Such results suggest that when students experience a broad, sustained approach to early algebra instruction, they are better positioned for success in algebra in middle grades» (Blanton et al., 2018, s. 43). Et av studiens resultater viste altså at elevene fikk en varig effekt av å arbeide med algebra, og at de har en større sannsynlighet for å lykkes i algebra senere i skoleløpet.

4.3 Algebraisk tenkning

I litteraturen blir begrepene *algebraic thinking* og *algebraic reasoning* brukt om de kognitive prosessene som er knyttet til algebra. Vi velger å bruke det norske begrepet *algebraisk tenkning* uavhengig av hvilket engelsk begrep forskerne har brukt i artiklene. Det er uenighet blant forskere i litteraturen om hva som betegner algebraisk tenkning, og vi vil presentere noen av disse synene i dette kapittelet.

Radford (2018) og Mason (1996) sier at algebraisk tenkning går ut på at den som lærer seg matematikk har en evne til å se det generelle i det spesielle. Radford (2014) poengterer at det er nødvendig at lærere er bevisst på om det er algebra eller aritmetikk man holder på med, og viktigheten med å være klar over at algebra og aritmetikk er forskjellig. Radford mener for eksempel at notasjon ikke kan karakterisere algebraisk tenkning. Dette begrunner han med at flere gamle kulturer har brukt algebra og tenkt algebraisk uten å bruke bokstaver, og det alfanumeriske tallsystemet vi bruker i dag er en nyere oppfinnelse (Radford, 2014, s. 260). Radford mener at algebraisk tenkning ikke handler om å bruke bokstaver, men å tenke på bestemte måter (Radford, 2008, s. 84). Derfor mener han at bruk av formell notasjon, variabler og ubestemte størrelser i algebra ikke er nødvendig for å kunne tenke algebraisk (Radford, 2014, s. 260). På samme måte er ikke bruk av alfanumerisk notasjon nok til å alene kvalifiseres som algebraisk tenkning. Dette illustrer Radford (2014) med en likning: $2x + 2 = 10 + x$ (s. 260). Det er mulig å løse denne ligningen med prøving og feiling. Når elevene setter inn verdier for x vil det inkludere en form for notasjon. Ligningen går ut på å finne en ubestemt eller ukjent størrelse, men dersom man løser den med en prøve og feile metode er ikke fremgangsmåten algebraisk. Dersom en elev har løst ligningen på denne måten, har den følgelig ikke tenkt algebraisk (Radford, 2014, s. 260).

Radford (2018) kommer med tre krav som karakteriserer algebraisk tenkning:

1. bruk av ubestemte kvantiteter (mengde eller størrelser)
2. representasjoner for ubestemte kvantiteter og operasjoner med dem
3. forholder seg analytisk til disse (1 og 2)

Disse tre kravene blir nærmere beskrevet i kapittel 4.2.1.

Zazkis & Liljedahl (2002) fant i sin studie at når elevene både tenkte algebraisk og brukte alfanumerisk notasjon, manglet de evnen til å se sammenhengen mellom de to. De mener derfor, på samme måte som Radford (2018), at bruk av alfanumerisk notasjon ikke nødvendigvis er en indikator på algebraisk tenkning. Mangelen på alfanumerisk notasjon er heller ikke en indikator på at elever mangler algebraisk tenkning (Zazkis & Liljedahl, 2002, s. 400).

Kieran (1989) mener, i motsetning til Radford (2018), at for å karakterisere noe som algebraisk tenkning er det ikke nok å se det generelle i det spesielle, man må ifølge henne uttrykke det algebraisk. Man uttrykker seg algebraisk ved bruk av algebraiske symboler (alfanumerisk notasjon) og dette er helt nødvendig for algebraisk tenkning ifølge Kieran (1989, s.165).

I likhet med Kieran (1989) mener Kaput (2008) at bruk av symboler er nødvendig for algebraisk tenkning. Kaput (2008) mener at algebraisk tenkning involverer to kjerneaspekter. Det første aspektet går ut på at algebraisk tenkning er å lage og uttrykke generaliseringer i formelle og konvensjonelle symbolsystem. Dette aspektet innebærer at elevene kjenner til symboler, kan forklare sammenhengen mellom dem og vet hvilke kombinasjoner av symboler som er tillatt. Det andre aspektet går ut på at elevene kan utføre syntaktisk styrte handlinger med symboler innenfor organiserte symbolsystemer. Dette går ut på at elevene følger de konvensjonelle reglene for symbolbruk (Kaput, 2008, s. 10). Kaput (2008) sier at det andre kjerneaspektet utvikler seg etter det første kjerneaspektet, fordi man må være kjent med symbolenes egenskaper og relasjoner før man kan gjøre regelbaserte handlinger med symbolene. I det første kjerneaspektet arbeider man med kjennskap til symbolene og det vil derfor være naturlig å starte med dette når det kommer til algebraisk tenkning.

4.3.1 Kriterier for algebraisk tenkning

Som nevnt ovenfor har Radford (2018) tre krav for algebraisk tenkning. Det første kravet er bruk av ubestemte kvantiteter, som refererer til hvordan elevene angriper situasjonen på en algebraisk måte. Bruk av ubestemte kvantiteter involverer mer en gitte tall eller andre matematiske enheter. Når elever bruker ubestemte kvantiteter regner de med variabler, ukjente, parameter eller generaliserte tall.

Det andre kravet, representasjoner med ubestemte kvantiteter og operasjoner med dem, går ut på at eleven kan bruke de ubestemte størrelsene og operere med dem. Ifølge Radford er det ikke et krav at de ubestemte størrelsene uttrykkes gjennom alfanumerisk symbolikk, de kan også uttrykkes gjennom andre semiotiske systemer uten at det påvirker tenkningens algebraiske natur. Andre semiotiske systemer som kan brukes er gester, naturlig språk, tegn, handlinger eller lyder. Radford poengterer likevel at alfanumerisk symbolikk gir muligheter for å utføre beregninger på en presis og effektiv måte, og at enkelte beregninger er svært vanskelige å utføre med andre semiotiske systemer. Det tredje, og siste kravet til Radford handler om elevene forholder seg analytisk til det første og andre kravet. Det vil si at elevene legger til, subtraherer, multipliserer dividerer osv. selv om de ubestemte kvantitetene ikke er kjent (Radford, 2018, s. 8).

Radford (2018) presenterer følgende ligning: $2x + 2 = 10 + x$, og som nevnt tidligere vil en løsning som benytter seg av prøving og feiling ikke regnes som algebraisk tenkning. Grunnen til at prøving og feiling ikke regnes som algebraisk er fordi denne metoden ikke er analytisk. Dersom elevene hadde subtrahert 2 fra begge sider av likhetstegnet og utledet formelen: $2x = 8 + x$, kan vi si at de tenker algebraisk. Ved å gjøre det på denne måten viser de at de tar hensyn til at $2x + 2$ er lik $10 + x$ og konsekvensen av dette er at de må trekke fra like mye på hver side (Radford, 2018, s. 9).

4.4 Gester

I kapitel 4.1 kom det frem at språket er viktig for elevers læring. Vi ser det derfor som relevant å inkludere teori om gester i denne oppgaven, da gester ofte er noe som forekommer samtidig som naturlig tale, eller som en erstatning for ting man ikke er i stand til å uttrykke med ord. I matematikkundervisning kan gester referere til bruk av håndbevegelser, kroppsspråk eller andre ikke-verbale uttrykk for å formidle eller forsterke matematiske konsepter, idéer eller operasjoner. Gester støtter ikke bare de mentale prosessene, men blir også brukt som formidlere av en sosiokulturell deltakelse (Vygotskij, 1962, referert i Francaviglia & Servidio, 2011, s. 92). Ifølge Francaviglia & Servidio (2011) kan ikke gester forstås som en alternativ tilnærming for å forstå matematiske konsepter, men heller en integrerende strategi (s. 92). Det regnes som en integrerende strategi fordi gester gir mulighet til en naturlig kommunikasjonsmekanisme som enklere kan gi tilgang til abstrakte idéer som ellers blir ansett som å være for komplekse til å forstå. Radford (2009) beskriver gester som "the very texture of thinking", og mener at tenkning ikke bare skjer i hodet, men også i og gjennom bruk av gester (s. 111).

Novack & Goldin-Meadow (2015) sier at gester er en naturlig del av språket, og at de ofte tilfører informasjon som ikke kan oppdages i tale. Gester blir brukt som kommunikasjon og gjør at man får muligheten til å uttrykke ting eller idéer som ellers kan være vanskelig å gi uttrykk for med ord. Vygotsky (1978) skriver at «the gesture is the initial visual sign that contains the childs future writing (...)» (s.107). Det elevene uttrykker ved gester kan altså senere bli noe de klarer å uttrykke skriftlig. Gester har også en funksjon som tenkning og læring, utover språkforståelse. Bruk av gester kan ifølge Novack & Goldin-Meadow (2015) lede elever til innsikt og fremme konseptuell utvikling (s. 405). Når en elev forklarer resoneringen sin kan gestene den bruker, samtidig som den forklarer, gi en unik innsikt i elevens tankeprosess (Novack & Goldin-Meadow, 2015, s. 406). Elever kan bruke gester til å skape forståelse mellom et abstrakt konsept og den virkelige verden. Dette kan for eksempel gjøres ved at en elev peker på noe i miljøet rundt seg for å forklare et mer abstrakt konsept. Ved å bruke peking på denne måten vil «lytterne» få mulighet til å ha de samme referansene som den som snakker (Alibali et al., 2014, s. 69-70).

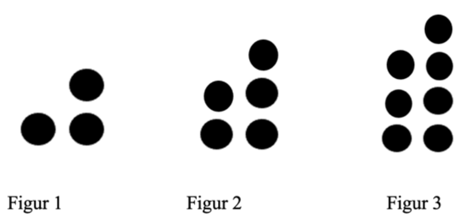
Novack & Goldin-Meadow (2015) skriver at: "(...) gesture, wich occurs *off* objects, provides a physical distance, which may be critical for abstracting away from a particular context and generalizing to new contexts.". Gester kan altså gjøre det lettere for elever å generalisere fordi de holder en avstand til de konkrete objektene, noe som gjør det lettere å tenke at dette kan gjelde for flere objekter med de samme egenskapene.

4.5 Figurmønster

Det finnes mange ulike begrep i litteraturen for det vi omtaler som figurmønster. *Number pattern* og *geometric number pattern* er to begreper Bishop (2000) bruker, og hun skriver at *number pattern* er en sekvens av tall der det finnes en veldefinert regel for å regne seg frem til hvert tall fra de forrige tallene eller fra tallets posisjon i sekvensen. *Geometric number pattern* definerer hun som tall som er avhengig av en sekvens av geometriske figurer der hver figur er avledet fra forrige figur ved en veldefinert prosedyre. Begge mønstertypene er lineære dersom hvert tall lages ved å legge til en konstant økning til forrige tall, eller tilsvarende hvis hvert tall er en lineær funksjon av dets posisjon i sekvensen (Bishop, 2000, s. 110). I et figurmønster beskriver figurtallet størrelsen, altså hvor mange elementer figuren består av, mens figurnummeret forteller hvor i tallrekken figuren befinner seg (Hinna et al., 2012, s. 71).

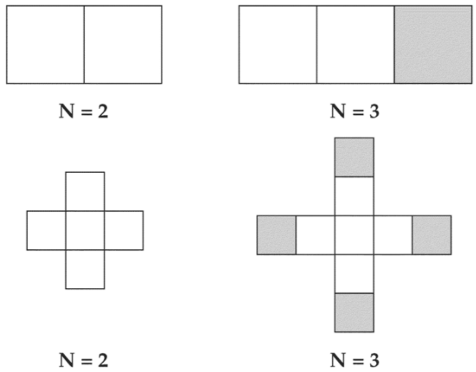
Lannin (2005) beskriver arbeid med mønster som oppgaver med en kontekst som ber elevene om å generalisere en regel som kan brukes til å bestemme andre deler av mønsteret. Han sier også at elever har større mulighet for å generalisere dersom konteksten i oppgaven gir dem muligheten til å bruke geometriske skjemaer til å knytte en regel til en visuell representasjon.

Stylianides (2009) definerer et mønster som en generell matematisk sammenheng som passer et gitt sett dataverdier. Et figurmønster er et mønster som består av figurer, der hver figur har et nummer i rekken (se figur 3). Oppgaver knyttet til figurmønster handler om å finne andre figurer i figurmønsteret. Et eksempel på en oppgave i figur 3, kan være å finne hvor mange prikker figurnummer 4 består av, eller hvilket figurnummer som består av 67 prikker.



*Figur 3: Eksempel på figur*mønster

Hvordan figurmønsteroppgaver er utformet er en faktor som kan påvirke hvilke strategier elever benytter seg av. Oppgaver som retter oppmerksomhet mot at man kan se forrige figur i den neste figuren gjør det enkelt for elever å se utviklingen i figurmønsteret fra figur til figur. Dette kan man se i figur 4, der kvadratene skravert i grått markerer de nye elementene i figuren. Rekursiv strategi er mye brukt når en oppgave er utformet på denne måten (Lannin et al., 2006).



Figur 4: Rekursiv orientert oppgave

En visuell representasjon av mønsteret kan ifølge Lannin et al. (2006) hjelpe elever å utvikle eksplisitte formler for en bestemt situasjon (s. 22). Visuelle representasjoner fører ofte til at elever benytter seg av tellestrategier. Ifølge Warren (2005) vil visuelle mønstre der forholdet mellom mønsteret og figurnummeret er tydelig, hjelpe elever å uttrykke og beskrive mønsteret muntlig (s. 309). Eksempelvis vil et figurmønster der lengden har like mange elementer som figurnummeret og bredden alltid er 2, være et mønster som uttrykker sammenhengen mellom figurmønster og figurnummer eksplisitt (se Warren, 2005, s. 306). I bordproblemet (se figur 5) kan elevene se at den ene langsiden av bordet har plass til n personer og siden det er plass til like mange personer på den andre langsiden, er det plass til $2n$. Den visuelle representasjonen viser også at det er plass til en person på hver ytterkant og de kan derfor komme frem til den eksplisitte formelen $2n + 2$, ved hjelp av telling. For at elever skal kunne bruke visuelle hint når de utvikler en strategi, må de gjenkjenne den visuelle sammenhengen på en generell måte. Utformingen av oppgaven kan derfor påvirke hvilke sammenhenger som er enkle å oppdage, og dermed lede elevene inn på en spesiell strategi (Lannin et al., 2006, s. 22). I kapittel 4.7 vil vi gå nærmere inn på forskjellige generaliseringsstrategier.

Spørsmålene som knyttes til figurmønsteret vil også påvirke elevenes generalisering. Warren & Cooper (2008) oppfordrer til å øke inngangsverdiene gradvis fra lave figurtall til høyere figurtall for at elevene skal se en sammenheng mellom det visuelle figurmønsteret og figurnummeret (s. 179). Det er også hensiktsmessig ifølge Cooper & Warren (2011) at elever arbeider med *kvasigeneralisering* som en inngangsport mot fullverdig generalisering (s. 193). Kvasigeneralisering går ut på at elevene benytter konkrete tall som eksempler på et hvilket som helst tall for å generalisere (Cooper & Warren, 2011, s. 193). Argumentasjonen for bruk av kvasigeneralisering går ut på at elever, ved hjelp av konkrete tall, kan oppfatte strukturen i mønsteret slik at det blir lettere å uttrykke generaliseringen med naturlig språk og ved hjelp av alfanumerisk notasjon.

4.6 Generalisering

Matematisk generalisering innebærer en regel eller påstand som gjelder for alle tilfeller av et matematisk problem (Carraher et al., 2008). Ifølge Mason (1996) er generalisering selve hjerterota i matematikk og opptrer i mange former. Dersom lærere ikke er klar over dets tilstedeværelse og ikke oppfordrer elevene til å uttrykke deres egne generaliseringer, vil ikke matematisk tenkning være til stede. Videre sier Mason at generalisering ikke bare er kulminasjonen av en matematisk undersøkelse, slik mange tror, men at det er tilstedeværende og en naturlig del av alt matematisk arbeid (Mason, 1996, s. 66). Barn viser ofte stort engasjement for generalisering, ved at de stiller mange spørsmål og grubler over alternative realiteter. Dette kan tyde på en naturlig interesse for det generelle, som lærere kan fortsette å dyrke (Mason, 1996, s. 70). For at elevene skal lykkes i generaliseringsarbeidet vil lærerens rolle i undervisningen være sentral. Carraher & Schliemann (2018) beskriver elevers utvikling av algebraiske ferdigheter på følgende måte:

> Although children may be capable of learning algebra from an early age, realizing this potential is not a simple matter of unlashing their capabilities. Algebra draws on ways of reasoning, kinds of problem situations, and systems of representation (notation, graphs, number line diagrams, certain ways of formulating relations in spoken language) that a child will generally not learn about, much less invent, on her own. (Carraher & Schliemann, 2018, s. 134)

Carraher & Schliemann beskriver i sitatet over at elever ikke vil kunne utvikle tilstrekkelige algebraiske ferdigheter uten hjelp av læreren når de arbeider med generaliseringsoppgaver. Dette skyldes flere faktorer som blir vanskelig for elever å finne ut av på egenhånd, deriblant formulering av oppgaven, det matematiske språket, formuleringer og sammenhenger. I tillegg til læreren, spiller også elevens jevnaldrende en viktig rolle i generaliseringsarbeidet (Carraher & Schliemann, 2018, s. 134).

Det verbale språket er viktig når elever skal begrunne generaliseringene sine, men det kan ofte være utfordrende å begrunne dem på en passende måte (Warren et al., 2013, s. 79). Lannin (2005) fant at elever ofte fokuserer mer på verdiene de bruker i oppgaven enn de generelle sammenhengene i mønstrene, og derfor sjeldent begrunner generaliseringene sine (s. 231). I tillegg tror mange elever at bruk av noen få talleksempler som illustrerer generaliseringen gir en tilstrekkelig begrunnelse (Radford, 1996, s. 109).

Radford (2010) skiller mellom algebraisk og ikke-algebraisk (*naïve induction)* generalisering. Dette er et skille lærere må være bevisst på i arbeid med mønstergeneralisering, fordi dette ikke alltid vil føre til algebraisk tenkning. Elever kan ved hjelp av prøving og feiling og induksjon komme frem til en formel, men dette er ikke algebraisk generalisering. Å generalisere et mønster algebraisk handler om evnen til å oppfatte hva som er felles for noen elementer i en sekvens S, og være klar over at det som er felles gjelder for alle elementene i sekvensen. I tillegg må man bruke det som er felles til å gi et direkte uttrykk for et hvilket som helst element i sekvensen (Radford, 2010). Radford deler algebraisk generalisering inn i tre underkategorier, henholdsvis faktuell, kontekstuell og symbolsk generalisering.

Ved faktuell generalisering blir ikke de ubestemte variablene navngitt. Elever som befinner seg på dette nivået kan benytte konkrete tilfeller av en variabel i mønsteret for å uttrykke en regel (Radford, 2010, s. 56). I bordproblemet (se figur 5) kan en elev for eksempel si at: «Hvis vi har 33 bord kan det sitte 33 pluss 33, pluss to på ytterkantene. Vi tegner alltid antall personer som dette (peker på langsidene) og en på hver ytterkant» (se Radford, 2018). Eleven bruker konkrete tall i forklaringen, men viser samtidig generalisering gjennom ord, gester og perseptuell aktivitet (Radford, 2010, s. 56).

I kontekstuell generalisering har de ubestemte variablene blitt navngitt, men navnene og/eller begrunnelsene blir knyttet til formen eller konteksten (Radford, 2010, s. 56). Et eksempel på dette fra bordporblemet kan være hvis en elev sier: «Først tar du antall bord og multipliserer dette med 2, fordi det kan sitte like mange personer på den ene langsiden som på den andre langsiden av bordet. Så legger du til 2, som er de to personene på ytterkantene» (se Radford, 2018). En formel som kan bli laget på dette nivået kan være $bord \cdot 2 + 2 = antall\ personer$.

I symbolsk generalisering uttrykker elevene ubestemte størrelser og operasjonene de gjør med dem ved hjelp av alfanumerisk notasjon. Elevene må kunne beskrive regelen, forklare variabelen og konstante tall i uttrykket. De må også kunne beskrive hvordan man finner ut hvor mange elementer det er i en hvilken som helst figur med algebraiske symboler (Radford, 2010, s. 56). I bordproblemet kan man si at en elev er i stand til å symbolsk generalisere dersom den lager en formel som ser slik ut: $A_n = 2n + 2$. I tillegg må eleven kunne forklare at A_n står for antall personer som kan sitte ved *n* bord, der *n* står for et hvilket som helst antall bord. $2n$ står for de to personene som sitter på hver langside av bordet, dette kan leses som 2 multiplisert med gitt antall bord. Eleven må også forstå at $+2$ står for de to personene som alltid vil sitte på ytterkanten av bordene.

4.7 Generaliseringsstrategier

I denne oppgaven vil strategier si hvilke fremgangsmåter elevene benytter for å løse et problem. Det finnes mange studier som omhandler strategier elever benytter når de skal generalisere et uttrykk knyttet til figurmønster. Vi har valgt å ta utgangspunkt i Lannin (2005) sitt rammeverk med oversikt over generaliseringsstrategier. Han deler strategiene i eksplisitte og ikke-eksplisitte strategier. Eksplisitte strategier gir muligheten til å beregne en bestemt verdi av den uavhengige variabelen, altså antall elementer i figuren, med en verdi av den uavhengige variabelen, altså figurnummeret. Man bruker en eksplisitt strategi dersom man konstruerer en regel eller formel, som direkte regner ut antall elementer i figuren. Hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi regnes som eksplisitte strategier. Ikke-eksplisitte strategier gir ikke en direkte regel eller formel, og man må derfor ta utgangspunkt i en bestemt figur i rekken for å finne neste figur. Tellestrategien og rekursiv strategi går under ikke-eksplisitte strategier. Disse fem strategiene vil bli presentert med eksempler i hvert sitt delkapittel under. Vi har også inkludert en ekstra strategi som er en del av Lannin et al. (2006) sitt rammeverk, kalt «chunking». Denne blir beskrevet ettersom vi i løpet av analysen oppdaget at den ble brukt i en av gruppene. Vi har valgt å gi den et norsk navn, og den vil heretter bli omtalt som grupperingsstrategien.

4.7.1 Prøve og feile strategien

Lannin (2005) beskriver en strategi han kaller for «guess-and-check», som vi har valgt å oversette til prøve og feile strategien. Denne strategien går ut på å gjette en regel uten å tenke over hvorfor denne regelen kan fungere. Elevene som benytter seg av denne strategien vil gjerne eksperimentere med ulike operasjoner og tall fra problemkonteksten, for å få disse til å passe med mønsteret. Prøve og feile strategien kan føre til bruk av det Mason (1996) kaller for «local tactics», der man prøver å finne en regel som passer til en bestemt del av mønsteret, fremfor å forstå en generell sammenheng i problemkonteksten (Lannin, 2005, s. 233). Et eksempel på bruk av «local tactics» kan man se i en elevdialog om «Theater Seat Problem», beskrevet av Lannin (2005). I dialogen prøver en elev seg frem til en formel og finner ut at den fungerer på den første raden i teatersalen, men ikke på de resterende radene. Han prøver så å justere på regelen sin for å få den til å passe på både rad 1 og rad 2. Når han finner en som passer til begge disse radene, sjekker han at regelen også fungerer på rad 3 og sier seg deretter fornøyd med regelen (Lannin, 2005, s. 244-245).

Prøve og feile strategien er beskrevet av flere teoretikere, blant annet Radford (2018). Ifølge han går denne strategien ut på å prøve forskjellige alternativer for å løse et gitt problem. Dersom man feiler, er det vanlig å prøve med et nytt alternativ. Når man kommer frem til et alternativ som ser ut til å fungere, er det vanlig å sjekke om det fungerer i flere tilfeller (Radford, 2018). Når elever arbeider med bordproblemet (se figur 5), kan de gjette på formler og teste om den fungerer på flere figurnummer. Dersom de oppdager at formelen fungerer på flere figurnummer, kan de konkludere med at de har funnet riktig formel. Radford (2018) beskriver denne strategien i sin forskning, men mener at en løsning som kommer av denne strategien ikke regnes som algebraisk. Selv om de arbeider med ubestemte kvantiteter og alfanumerisk notasjon, regnes den ikke som algebraisk fordi formelen ikke ble konstruert, men gjettet.

4.7.2 Tellestrategien

Ifølge Lannin (2005) går tellestrategien ut på å se på et bilde eller konstruere en modell som representerer en gitt situasjon, for så å telle elementene i modellen. Disse blir så brukt for å konstruere en regel eller formel. I bordproblemet kan tellestrategien benyttes ved at elevene tegner de neste figurene og teller antall personer på hvert bord, for så å lage en formel.

Stacey (1989) omtaler også tellestrategien som en vanlig strategi, som går ut på å telle ut fra en tegning. I hennes studie kom det frem at å telle fra en tegning var den vanligste strategien blant elever, men at denne strategien ofte førte til nesten riktige svar. For eksempel 61 eller 63, når svaret var 62. Ifølge Stacey er det ikke et krav at elevene teller fra en tegning for å regne det som en tellestrategi. I sin studie fant hun at noen elever lagde en tabell ved hjelp av gjentatt addisjon, fremfor å tegne opp de neste figurene og telle disse. Hun klassifiserte også dette som en tellestrategi, selv om det krevde mer eksplisitt kunnskap enn å telle fra en tegning.

4.7.3 Hel-objekt strategi

Hel-objekt strategien handler om at elevene tar utgangspunkt i en figur der de kjenner til hvor mange elementer figuren består av, og bruker denne informasjonen til å konstruere en større eller mindre figur (Lannin, 2005, s. 234). Dette gjøres ofte ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon. Lannin et al. (2006) beskriver denne strategien i sin forskning, og bruker følgende eksempel: Dersom 10 rader med kuber har 42 klistremerker, har 20 rader med kuber $2 \cdot 42$ klistremerker, altså 84. På grunn av at noen av klistremerkene blir skjult når det legges til nye kuber, vil 20 rader med kuber ha 82 klistremerker, ikke 84 som man kommer frem til ved å doble figurtallet til figur 10. Dette illustrerer problemet med denne strategien, fordi elever ofte glemmer å ta hensyn til over- eller undertelling.

I bordproblemet kan denne strategien komme til uttrykk dersom elevene allerede vet at det kan sitte 18 personer ved 8 bord, og skal finne antall personer som kan sitte ved 4 bord. Elever som benytter seg av denne strategien, vil sannsynligvis dividere 18 med 2 og få til svar at det kan sitte 9 personer ved 4 bord. I realiteten vil det kunne sitte 10 personer ved 4 bord. Med denne tankegangen kan man se for seg at langbordet på 8 deles i 2, men elevene glemmer å legge til den personen som sitter på enden av bordet, og vil derfor få feil svar. Hel-objekt strategien blir oftest brukt i de tilfellene der man kan doble et figurnummer for å finne figurtallet til det ønskede figurnummeret (Lannin et al., 2006).

Andre forskere beskriver også hel-objekt strategien, blant annet Stacey (1989) og Bishop (2000). Stacey har en tilnærmet lik definisjon som Lannin (2005) av denne strategien. I tillegg sier hun at elever som bruker hel-objekt strategien ofte bruker denne feil, fordi de har manglende forståelse av proporsjonalitet (Stacey, 1989). Bishop (2000) beskriver en strategi som kan ligne på denne, som hun kaller for *apply proportional reasoning.* Hun sier at noen elever bruker proporsjonalt resonnement på feil måte ved at de for eksempel multipliserer figurtallet til figurnummer 3 med 4, for å finne figurtallet til figurnummer 12. Ved bruk av denne strategien tas det ikke hensyn til at noen deler av figurmønsteret gjerne overlapper hverandre når det legges til et nytt element, fordi figurnummeret øker.

4.7.4 Rekursiv strategi

Rekursiv strategi innebærer at elevene beskriver sammenhengen mellom en figur og den påfølgende. De vil derfor være avhengig av å vite hvor mange elementer den forrige figuren består av, for å finne den neste (Lannin et al., 2006, s. 6). I bordproblemet (se figur 5) kan en rekursiv strategi komme til uttrykk ved at elevene ser hvor mange personer som legges til for hvert bord, og adderer seg frem til ønsket figurnummer. Dersom elevene skal finne figurnummer 14 ved hjelp av denne strategien, vil de bli nødt til å finne de 13 forrige figurene først.

Rivera & Becker (2005) fant i sin forskning at mange elever brukte en strategi de kaller for «recursive induction». Når elever benyttet denne strategien la de merke til hvor mange elementer figuren økte med for hvert figurnummer, og uttrykte dette eksempelvis med $n + 3$ og $n + 5$. De fleste som uttrykte økningen i figuren på denne måten mente at en slik forklaring var tilstrekkelig for å forklare hvordan figurene utviklet seg. I dette tilfellet stod *n* for antall elementer i figuren før. Ved korrekt alfanumerisk notasjon ville det blitt uttrykt som $a_n = a_{n-1} + 3$. Likevel viser formelen til elevene og forklaringen deres at de er avhengig av figuren før for å finne den neste, slik man er når man benytter seg av en rekursiv strategi.

4.7.5 Kontekstuell strategi

En kontekstuell strategi går ut på at elevene lager en regel basert på den informasjonen de får fra oppgavekonteksten, samtidig som regelen relateres til en telleteknikk (Lannin, 2005). I bordproblemet kan elevene oppdage at det er plass til to personer på hvert bord, og en ekstra på hver ende. Ut fra denne informasjonen kan elevene konstruere en formel.

Denne generaliseringsstrategien blir også omtalt av Stacey (1989), men hun kaller den for lineærmetoden (*linear method*). Stacey (1989) beskriver lineærmetoden som å bruke både multiplikasjon og addisjon i et mønster, og anser rekkefølgen på regneoperasjonen som viktige. I denne strategien lager elevene en formel på formen $f(x) = ax + b$, der a ikke kan være null.

Begge strategiene går ut på å finne en regel som kan brukes til å finne svaret på et hvilket som helst figurnummer i figurmønsteret. Det som er forskjellen mellom disse er måten man kan skrive regelen på, og hva regelen tar utgangspunkt i.

4.7.6 Grupperingsstrategien

Chunking strategien, som vi har valgt å kalle grupperingsstrategien, går ut på at man tar utgangspunkt i en kjent figur og bygger videre på denne med den rekursive sammenhengen for komme frem til ønsket figur (Lannin et al., 2006, s. 6). Å bygge videre på en kjent figur med den rekursive sammenhengen i mønsteret, vil si at man multipliserer differansen mellom figurnummeret til den kjente figuren og ønsket figurnummer med antall elementer figurmønsteret øker med for hver figur. I bordproblemet kan denne strategien komme til syne ved at elevene tar utgangspunkt i figur 10, som har 22 stoler, og komme frem til at figur 15 vil ha $22 + 5(2)$ fordi antall stoler øker med 2 for hver figur.

5. Analyse og resultatdel

I dette kapittelet vil vi beskrive hvordan vi bearbeidet datamaterialet etter at det var samlet inn. Vi vil gjennomgå en beskrivelse av arbeidsøktene vi hadde med elevene og analysere hvilke strategier de har brukt og hva dette sier om deres algebraiske tenkning i lys av teorien som er presentert i kapittel 4, teori. Analysen som blir presentert i dette kapittelet, vil utgjøre det empiriske grunnlaget for drøftingen som finner sted i kapittel 6.

Vi har valgt å analysere de to undervisningsøktene hver for seg, der vi først presenterer oppgaven for økten og deretter hvilke strategier som kom til syne i arbeidet med denne oppgaven og hva vi kan si om deres algebraiske tenkning ut fra det som kommer frem. Når vi forsøker å kategorisere elevers strategier kan de bruke mer enn en strategi i deres forsøk på å generalisere. Dette er en av grunnene til at vi vil analysere hver økt for seg, for å kunne beskrive utviklingen i elevenes strategibruk på en mer systematisk måte.

Som nevnt tidligere ble det hentet inn data fra to undervisningsøkter med til sammen 12 elever på 4. trinn. Elevene ble delt inn i tre grupper med tre til fire elever på hver gruppe, der de arbeidet med en oppgave knyttet til figurmønster per dag. Øktene ble kjørt med en dags mellomrom. I datapresentasjonen, analysen og drøftingen har vi gitt elevene fiktive navn for å anonymisere dem. Gruppe 1 bestod av Marit, Andreas og Petter. Gruppe 2 bestod av Jonas, Simen, Ingrid, Martine og Anders. Gruppe 3 bestod av Ådne, Camilla, Erik og Marthe.

På grunn av sykdom ble det noen omrokeringer på gruppe 2 og gruppe 3. På dag 1, da elevene arbeidet med bordproblemet, bestod gruppe 2 av Anders, Jonas, Martine og Simen. Gruppe 3 bestod av Ådne, Camilla og Erik. På dag 2, da de arbeidet med det voksende mønsteret, bestod gruppe 2 av Anders, Jonas, Martine og Ingrid. Gruppe 3 bestod av Ådne, Camilla, Erik og Marthe.

Vi har også valgt å presentere dataene med linjenummer, for å vise omtrent hvor i prosessen elevene befinner seg når de ulike strategiene blir tatt i bruk.

5.1 Analyseredskap

I det teorikapittelet har vi beskrevet fem generaliseringsstrategier, med utgangspunkt i Lannin (2005), som er vanlig for elever å bruke når de arbeider med figurmønster. Disse strategiene har vi sammenfattet i en tabell under og de vil bli brukt for å se hvilken av dem vi kan identifisere i dataene våre. I denne studien har vi funnet bruk av to strategier som ikke blir beskrevet i Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier, og vi har derfor valgt å utvide rammeverket.

Tabell 2: Utvidelse av rammeverk for generaliseringsstrategier

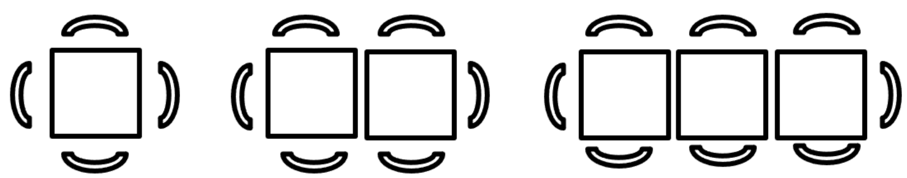
Strategi	**Beskrivelse**
Ikke-eksplisitte strategier	
Tellestrategien	Eleven tegner et bilde eller en modell av situasjonen, og teller ønskede egenskaper ut fra dette.
Rekursiv strategi	Eleven ser på tidligere figurer i mønsteret og bruker disse til å regne seg frem til neste figur. Dette blir brukt for å generalisere en formel.
Eksplisitte strategier	
Hel-objekt strategien	Eleven bruker prinsippet om proporsjonalitet og tar utgangspunkt i en allerede kjent verdi. Elevene kan ta i bruk multiplikasjon eller divisjon for å regne seg frem til hvor mange elementer det er i en større eller mindre figur. Denne strategien kan føre til over- eller undertelling.
Prøve og feile strategien	Eleven prøver seg frem med ulike tall fra problemkonteksten og tester ut forskjellige operasjoner med disse. Eleven kan også gjette på formler uten noen begrunnelse på hvorfor denne kan fungere.
Kontekstuell strategi	Eleven konstruerer en formel ut fra den informasjonen som blir oppgitt i oppgaven. Denne informasjonen kombineres med en telleteknikk.
Del-hel strategien	Eleven tar utgangspunkt i to eller flere figurer de kjenner figurtallet til og

	subtraherer eller adderer disse med hverandre for å komme frem til ønsket figurnummer. Strategien fører ofte til over- eller undertelling.
Grupperingsstrategien (Chunking)	Eleven bruker et figurnummer de kjenner figurtallet til og multipliserer differansen mellom det kjente figurnummeret og figurnummeret de skal finne med antall elementer figurmønsteret øker med fra figur til figur.

5.2 Oppgave 1 – bordproblemet

I den første økten fikk elevene presentert følgende oppgave:

Dere skal arrangere en klassefest. Dagen før skal dere sette opp langbord i klasserommet som står inntil hverandre. Bordene er kvadratiske, og det er plass til en person på hver side. Under kan dere se hvor mange personer det er plass til rundt 1, 2 og 3 bord.



Figur 5: Bordproblemet

a) Hvor mange personer er det plass til rundt 4 bord?
b) Hvor mange personer er det plass til rundt 6 bord?
c) Hvor mange personer er det plass til rundt 20 bord? Hva med 50 bord?
d) 30 elever kom på klassefesten, hvor mange bord trenger vi?
e) Forklar hvordan man kan finne ut hvor mange personer det er plass til rundt et hvilket som helst antall bord. Kan du lage en regel?

Elevene får presentert et mønster som har en lineær økning. Dette figurmønsteret vokser med to stoler og ett bord fra figur til figur. Antall bord vil være lik figurnummeret. En eksplisitt formel for antall personer vil være $An = 2n + 2$, hvor An står for antall personer og n står for figurnummeret. En begrunnelse for denne formelen kan være at figur *n* består av en rekke med *n* bord. Bordene vil ha to ledige langsider der det er plass til *n* personer, i tillegg vil de to ytterste bordene ha plass til en person hver på den siden som ikke er plassert inntil et annet bord.

I den første økten fikk elevene presentert oppgaven om bordproblemet og fikk konteksten for oppgaven lest for seg. Lærerne beskrev også vilkårene for å plassere flere personer. Det er viktig at elevene er innforstått med at bordene står inntil hverandre, og at hvert bord fylles opp med maksimalt antall personer. Dersom elevene ikke er konsekvent med å fylle opp hvert bord, vil man ikke kunne avdekke hvordan mønsteret utvikler seg. Elevene fikk kun se de tre første figurene i mønsteret (se figur 5) og deloppgave a) på en digital tavle foran i klasserommet. Etter hvert som elevene arbeidet med oppgaven, dukket det opp flere spørsmål på tavlen (deloppgave b, c, d og e), uten at dette ble annonsert av lærerne. Elevene kunne bare se på tavlen at det hadde kommet nye oppgaver. Dette gjorde vi slik at elevene fikk mulighet til å arbeide i sitt eget tempo. Ved slutten av økten fikk hver gruppe presentere hvordan de hadde løst oppgavene til de andre gruppene.

5.2.1 Gruppe 1

Dialog 1

Gruppe 1 startet oppgaven med bordproblemet på følgende måte:

*1 Marit: Vi kan tegne opp! *tegner fire bord**
*2 Andreas: *teller med fingrene hvor mange det er plass til rundt to bord* Da er det 6 på bord 2*
3 Petter: Men det er ikke sikkert, for når det er tre er det ikke 4 på hvert bord. Da er det 1, 2, 3
4 Andreas: På fire er det jo 4 bortover, og 4 nede og 1 på hver side
*5 Marit: Bordene sitter jo sammen, så det går ikke at det sitter 4 her *peker på de fire bordene**
6 Andreas: Det var det jeg sa!
*7 Marit: For bordene sitter jo sammen sånn som det *peker på pultene i klasserommet*. Så det er 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10*
8 Andreas: Da er svaret 10

En elev starter med å lage en tegning av situasjonen. En annen elev teller antall elementer i figurnummer 2, og kommer frem til at det er plass til 6 personer. Å lage en modell av situasjonen og telle antall elementer vil kunne kategoriseres som tellestrategien. Det ser ut til at Andreas har oppdaget et mønster på grunn av det han sier (4). Dette kan relateres til kontekstuell strategi, fordi han har laget en regel på hvordan man kan regne ut hvor mange personer det er plass til rundt 4 bord. De andre elevene går likevel for bruken av tellestrategien for å svare på oppgaven, til tross for det Andreas finner ut av. Elevene oppdager at det ikke er plass til like mange personer rundt et enkelt bord i figurnummer 1 og 2, som de øvrige figurnumrene. I figurnummer 1 er det plass til 4 personer rundt et enkelt bord og i figur 2 er det plass til 3 personer rundt et enkelt bord, men i de påfølgende figurene er det bare plass til 2 personer rundt hvert bord, sett bort fra de ytterste bordene i figuren. Marit viser dette ved hjelp av gester. Først peker hun på bordene de har tegnet (5) og sier at det ikke kan sitte 4 rundt hvert av bordene når de står sammen. Deretter peker hun på pultene i klasserommet (7), slik at de andre på gruppen ser et konkret fysisk eksempel. I denne dialogen har vi funnet bruk av både tellestrategien og kontekstuell strategi.

Gruppe 1 har ikke angrepet situasjonen på en algebraisk måte, fordi de ikke regner med variabler, ukjente eller generaliserte tall. Vi kan likevel si at elevene på denne gruppen nærmer seg algebraisk tenkning, fordi de har kommet frem til en regel (4). Dersom de hadde behandlet tallene som variabler og vist en forståelse av at tallet 4 vil variere avhengig av hvilket figurtall de skal finne, ville man kunne kategorisere dette som algebraisk tenkning ut fra Radford (2018) sine krav for algebraisk tenkning. Andreas sitt utsagn (4) kan ligne på måten en elev som befinner seg på et faktuelt generaliseringsnivå ville uttrykt seg på. Han bruker konkrete tall for de ubestemte variablene til å vise strukturen i mønsteret. Det blir derimot ikke vist, verken med gester eller ord, at dette gjelder for flere figurer i mønsteret enn figur 4, og det vil derfor ikke kunne klassifiseres som generalisering.

Dialog 2

Her arbeider gruppe 1 med oppgave c) der de skal finne ut hvor mange personer som kan sitte rundt 20 og 50 bord.

*13 Marit: *begynner å tegne 20 kvadrater**

14 Andreas: Det er 42

15 Petter: Hæ? Det kan ikke være over 40

*16 Andreas: Jo, fordi det er 3 der *peker på den ene langsiden i figur 3* og 3 der *peker på den andre langsiden i figur 3* og da blir det 1 pluss 1 *peker på de to ytterkantene*, så det blir det samme på de andre også*
17 Petter: Hva med 50 bord da?
18 Andreas: Det tegner vi ikke
19 Petter: Jo, det må vi
*20 Marit: *ferdig med å tegne 20 bord og teller hvor mange det er plass til med fingeren* ja Andreas hadde rett*
*21 Lærer: Hva tenker dere her? *peker på de 20 kvadratene de har tegnet opp**
*22 Marit: Det er 20 på den ene siden og 20 på den andre, og så 1,2 *peker på ytterkantene**
23 Andreas: På 50 er det 102

Elevene har brukt tellestrategien i oppgavene frem til nå og starter også denne oppgaven med å tegne opp bord, sannsynligvis for å fortsette å telle antall personer det er plass til rundt bordene. Andreas (14) sier at det er 42 uten videre forklaring, og det kunne virket som om han gjettet, helt til han i setning 16 forklarer hvordan figur 3 er oppbygd. Han uttrykker at siden det er plass til 3 personer på hver av langsidene i figur 3 og 1 på hver ytterkant, må det være slik i de andre figurene også. Denne tankegangen stemmer overens med svaret hans, da 42 kan skrives som $20 \cdot 2 + 2$. Det virker som om de fleste av gruppemedlemmene godtar forklaringen til Andreas da de ikke stiller spørsmål ved den, og heller går videre til neste oppgave. Marit (20) fortsetter likevel å tegne en modell av figurnummer 20 og teller antall personer. Hun bruker derfor tellestrategien til å bli sikker på at Andreas sitt svar stemmer. Det kan også virke som om enkelte av gruppemedlemmene (Petter (19)) vil fortsette å bruke tellestrategien når de går videre til 50 bord. Læreren (21) spør så elevene om hva de har tenkt når de svarte på hvor mange som kunne sitte ved 20 bord, der Marit (22) viser at hun også har forstått sammenhengen Andreas kom frem til. Marit (22) sier at der er plass til 20 personer på hver langside og 2 på ytterkantene.

På spørsmålet om 50 bord svarer Andreas (23) kort at det er plass til 102 personer, uten videre forklaring. Elevene i denne gruppen har kommet frem til en regel ved bruk av eksempler. Man kan se at de bruker informasjon fra oppgavekonteksten ved at de tar utgangspunkt i figur 3 og lager seg en regel ut fra oppbyggingen av denne figuren. Strategien elevene benytter kan derfor kategoriseres som kontekstuell strategi. De uttrykker likevel ikke regelen eksplisitt. Senere i gruppens oppgaveløsning når de eksplisitt blir bedt om å lage en regel, uttrykker de en generell regel med verbalt språk som vi kan se i dialog 4. Det har blitt funnet bruk av tellestrategien og kontekstuell strategi i denne dialogen.

I denne dialogen befinner elevene seg på faktuell generalisering. De benytter konkrete tall som variabler, noe man kan se når Andreas (16) forklarer hvor mange det er plass til på hver side av bordet i figur 3 og uttrykker at man kan telle personer på denne måten på alle bord. For å henvise til de ulike delene av figurmønsteret bruker Andreas peking. Pekingen blir også brukt som en forklaring til hvorfor det adderes med 2, ved at han peker på ytterkantene. Marit bruker sammenhengen Andreas oppdaget på figur 3 til å uttrykke hvor mange som kan sitte på hver side av bordet på figur 20 ved hjelp av gester. Når Marit (22) sier «den ene siden» og «den andre» kan dette bli upresist, men hennes bruk av gester gjør det tydeligere. Det kommer klart frem hvilke deler av figuren hun omtaler, ved at hun peker på ytterkantene når hun sier hvor de to siste personene sitter, og det ikke er flere andre sider enn de to langsidene som hun ikke har navngitt konkret eller pekt på.

Dialog 3

Videre skal gruppe 1 finne ut av hvor mange bord man trenger dersom det kommer 30 personer på klassefesten, som er oppgave d).

30 Andreas: Da er det 15! Hvis vi tar 15 pluss 15 da

*31 Petter: 5 bord er 12 *peker på figurnummer 5**

*32 Marit: Eller skal vi ta tre sånne bord? *peker på figurnummer 4**

*33 Andreas: Vi kan ta den her minus 12 *peker på figurnummer 20* eller den her tre ganger *peker på figurnummer 4**

34 Petter: Vi kan ta minus 12

*35 Petter: 12 er 50 ... Nei, 12 er 5. Og da ... eh hvor mange var det? Hvor mange bord var det? *peker på der det står skrevet 42 på tavlen**

36 Marit: Det var 42

37 Petter: Var det 42 bord? Det var 40 bord, var det ikke?

38 Marit: Nei, det var 20

39 Petter: 20 minus 5 er 15

Dialogen starter med at Andreas (30) foreslår at det er 15 bord. Dette fremstår som gjetting fordi han ikke relaterer det til hvor mange personer som kan sitte rundt et bord i mønsteret, men heller argumenterer med at $15 + 15 = 30$. Videre i dialogen diskuterer elevene mulige sammensetninger av bord som gir plass til 30 personer. De bruker kjente verdier, figurnummer 5 og figurnummer 20 som de allerede har regnet seg frem til, og diskuterer hvordan de kan bruke multiplikasjon eller subtraksjon til å regne seg frem til ønsket figurnummer. Når elevene subtraherer de 42 personene som kan sitte ved bord 20 med de 12 personene som kan sitte ved bord 5 ender de opp med 15 bord, altså ett bord mer enn de trenger til 30 personer. Elevene gjør ikke de nødvendige justeringene for å unngå over- og undertelling. Ved å trekke fra 5 bord på denne måten glemmer de å legge til de to personene som kan sitte på hver ytterkant. I rammeverket vårt presenteres hel-objekt strategien som en strategi der man tar i bruk multiplikasjon eller divisjon. Elevene i denne gruppen velger å gå for å subtrahere to kjente figurnumre fremfor å multiplisere med et kjent figurnummer, slik de også vurderer. Tankegangen til elevene der de tar utgangspunkt i kjente verdier og bruker disse til å regne seg frem til ønsket figurnummer minner om hel-objekt strategien. Likevel bygger ikke elevenes tankegang på å utnytte proporsjonalitet og vil derfor kunne kategoriseres som del-hel strategien.

Elevene i denne dialogen bruker gester hyppig til å vise hvilken figur de omtaler. De peker på figurnumrene både som et alternativ til å navngi dem (32 og 33) og som støtte når de navngir dem (31).

Videre kontrollerer elevene på gruppe 1 om de har funnet riktig antall bord, ved å tegne opp 15 bord. Her går de over til bruk av en annen strategi enn det de hadde brukt tidligere i denne deloppgaven.

Petter tegner 15 bord, og teller hvor mange det er plass til
*45 Andreas: Det er 15 bortover her *peker på langsiden av bordet* og 15 pluss 15 er lik 30, pluss 1 pluss 1 er 32. Vi må ta 2 mindre bord*
46 Marit: Vi må ta minus 1 bord
47 Andreas: 2!
*48 Marit: Minus 2 bord? *visker vekk 2 bord**
Alle teller hvor mange det er plass til rundt 13 bord
49 Marit: 28!
Andreas tegner et bord til
50 Petter: Nå er det plass til to personer til
51 Marit: Da er det 14 bord

I starten kan det se ut som om de bruker en tellestrategi ettersom Petter tegner opp bordene og teller seg frem til hvor mange det er plass til. Andreas sitt utsagn (45) viser til at de ser et mønster ved at det er like mange på hver langside av bordet og en på hver ytterkant. Det kan virke som om Andreas mangler ord for å beskrive hvor mange som kan sitte ved en langside av bordet, men han løser dette ved å peke. Elevene diskuterer om de skal trekke fra ett eller to bord, og starter med å fjerne to bord. Da oppdager de at de kan plassere 28 personer rundt 13 bord, og innser at de må legge til et ekstra bord for å få plass til 30 personer. Dette kan relateres til prøve og feile strategien fordi de ikke uttrykker noen tanke om hvorfor de trekker fra 1 eller 2 bord, men tilsynelatende gjør det for å få svaret til å passe. De viser at de er avhengig av å vite figurtallet på et spesifikt bord for å subtrahere seg frem til det ønskede figurnummeret. Selv om de først prøver seg frem og deretter teller, er strategien de benytter for å komme frem til en løsning rekursiv.

Dialog 4

I dette utdraget av dialogen til gruppe 1 arbeider de med oppgave e), som går ut på å lage en regel for hvor mange personer det er plass til rundt et hvilket som helst antall bord.

60 Marit: Vi skal lage en regel ...

61 Petter: Men hvordan skal vi lage en regel?

62. Andreas: Vet ikke ... vi kan ta 7 bord

Marit tegner 7 bord

*63 Petter: *peker på langsidene av bordet* sju ... sju ... *peker på begge ytterkantene* en, en. Det blir 16*

64 Marit: Okei vi kan ta 103 da

65 Petter: 103! Skal vi tegne så mange?

*66 Andreas: Vi kan jo bare gjøre det sånn her *peker på tegningen de har laget med 50 bord**

Marit tegner to parallelle horisontale streker og skriver 103 over den ene streken og under den andre

67 Andreas: Og så skriver du en på hver side

Marit skriver 1 på hver ytterkant

68 Petter: Hvis vi plusser de sammen blir det 208

69 Marit: Vi kan tegne sånn på alle tall ... Vi lager bare streker og skriver tallet vi skal finne over og under ... og to på sidene

70 Andreas: Er ikke dette en regel da?
71 Petter: Jeg syns det er en smart regel ... tallet på bordet plusses to ganger og pluss to til på kantene

Elevene starter denne dialogen med å regne ut hvor mange personer som kan sitte ved tilfeldige antall bord. Petters utsagn (63) viser, sammen med pekingen, at han teller personer på en bestemt måte ut fra figurens utforming. Elevene fortsetter å bruke denne metoden når de regner ut personer for flere bord. Ved å tegne streker og skrive tall fremfor å fortsette å tegne bord viser elevene at de kan representere bord og antall personer på en enklere måte, men de er fremdeles avhengig av konkrete tall. Elevene har brukt kontekstuell strategi ved at de brukte informasjon fra oppgaven og lagde en regel, selv om de ikke har utviklet en formel enda.

Elevene begynner å generalisere når Marit (69) sier at de kan gjøre det på denne måten med alle tall. Petter viser også forståelse for en sammenheng mellom figurnummeret og figurtallet når han uttrykker at det er «tallet på bordet» som adderes med seg selv. Elevene befinner seg på faktuell generalisering frem til Marits utsagn (69). De bruker konkrete tilfeller av variabelen i mønsteret, og uttrykker at de kan gjøre det på denne måten for alle figurnummer. Marit sitt utsagn (69) gjør at gruppen beveger seg mer over til kontekstuell generalisering. Hun navngir den ukjente variabelen, og velger å kalle denne for «tallet vi skal finne». Petter (71) endrer navnet på den ukjente variabelen til «tallet på bordet». De ubestemte kvantitetene blir her navngitt ut fra konteksten på oppgaven.

Elevene viser til at de kan regne med variabler når Marit konstaterer at de kan lage streker og skrive figurnummeret. De har som nevnt tidligere brukt konkrete tall, men skjønner etter hvert at de konkrete tallene de har brukt er variabler. Da de oppdaget dette ble det første kravet til Radford (2018) oppfylt, som er bruk av ubestemte kvantiteter. De oppfyller også det andre kravet for algebraisk tenkning, fordi de klarer å bruke de ubestemte størrelsene til å regne seg frem til et hvilket som helst figurtall. De forholder seg analytisk til de ubestemte kvantitetene og operasjonene de gjør med dem ved at det adderer den ukjente variabelen som om den var kjent, og forklarer hvor konstantleddet kommer til syne i figurmønsteret. Elevene i denne gruppen viser derfor høy grad av algebraisk tenkning i denne dialogen ved bruk av kontekstuell strategi.

Petter (63) bruker peking til å henvise til ulike deler av figuren slik at han får frem strukturen i mønsteret. Det blir også brukt peking til å foreslå en metode for å løse oppgaven, når Andreas (66) sier at de kan gjøre det «sånn her» og peker på måten de fant ut hvor mange personer som kan sitte rundt 50 bord. Peking fungerer som en måte å kommunisere med de andre gruppemedlemmene, enten i mangel på ord til å beskrive hva de mener eller for at de andre raskere skal forstå hva de mener.

5.2.2 Gruppe 2

Dialog 1

Gruppe 2 startet oppgaven om bordproblemet på følgende måte:

1 Anders: Det kan man jo bare telle

2 Simen: Er det ikke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 på tre bord?

3 Jonas: Jo, men vi skal jo ha fire bord

*4 Anders: Ja *tegner fire bord**

5 Simen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Det er 10 stoler!

6 Martine: Da er det plass til 10 personer

Elevene begynner med å telle antall elementer det er i figurnummer 3, og finner ut at det er plass til 8 personer rundt 3 bord. Videre tegner en elev figurnummer 4 ved å tegne fire kvadrater og teller hvor mange personer det er plass til rundt disse. Dette viser at elevene er avhengig av å ha en tegning eller modell for å telle antall personer det er plass til. Ut fra analyseredskapet vi benytter for å identifisere elevenes strategier, innebærer tellestrategien at elevene ser på et bilde eller konstruerer en modell som representerer en gitt situasjon, for så å telle elementene i modellen. Elevene i gruppe 2 konstruerer figurnummer 4 og teller deretter elementene, så dette vil derfor karakteriseres som en tellestrategi.

Ifølge Radford (2018) må elevene ha tatt i bruk ubestemte kvantiteter, representasjoner for ubestemte kvantiteter og operasjoner med dem og forholde seg analytisk til disse. I denne dialogen har ikke gruppe 2 oppfylt noen av de tre kravene til Radford, og vi kan derfor ikke si at bruken av tellestrategien i dette tilfellet viser at elevene tenker algebraisk.

Dialog 2

Gruppe 2 benyttet seg av en annen strategi når de skulle finne ut hvor mange personer det er plass til rundt 20 bord på deloppgave c). De startet oppgaven slik:

Jonas tegner 5 bord med stoler på hver side

17 Martine: Det er eh ... 12 stoler, og så ganger du det med 5 så blir det ... eh så blir det ... nei ganger det med 4 så blir det 20

18 Martine: 12 ganger 4 er ... 48

19 Jonas: da er de 48 personer på 20 bord

20 Lærer: Er dere helt sikre på det? Hvis dere ser på tavlen ... ser dere hva som forandrer seg for hver figur og hva som er likt for hver figur?

21 Simen: Det er alltid to ytterst

*22 Anders: Ja en på hver side *peker på ytterkantene i figur 5**

*23 Lærer: Hvor mange er det plass til på langsidene da? *drar fingeren langs begge langsidene**

*24 Simen: Her er det 5 *peker på den ene langsiden*... og her er det også 5 *peker på den andre langsiden**

25 Lærer: Okei, er det alltid sånn?

*26 Anders: Nei ... for her er det 4 personer *peker på langsiden i figur 4* og her er det 4 *peker på den andre langsiden i figur 4**

*27 Martine: Men ... det er jo fordi det er 4 bord der Anders ... da kan det jo bare sitte 4. 1, 2, 3, 4 *teller en av langsidene i figur 4 med fingeren**

28 Lærer: Så hvor mange personer kan sitte på hver langside når det er 20 bord?

*29 Martine: 20 på den ene og 20 på den andre *tegner to parallelle streker i luften**

30 Simen: Det blir 40, og så er det alltid to ytterst

Elevene starter med å tegne figurnummer 5, men det kommer ikke frem av dialog eller gester hvordan de finner figurtallet. Sannsynligvis har de funnet figurtallet til figurnummer 5 ved å telle inni seg, ettersom de benyttet tellestrategien i oppgaven før. Her utnytter elevene det faktum at 20 går opp i 5 gangen, og multipliserer den kjente verdien til bord nummer 5 med 4 for å finne antall personer som kan sitte ved 20 bord. Dette fører til en overtelling av personer, fordi de legger til to personer på ytterkantene fire ganger i stedet for én. En slik måte å tenke på hadde fungert dersom de hadde 4 ulike langbord sammensatt av 5 bord, men ettersom alle bordene skal stå inntil hverandre måtte de justert slik at de tok bort to personer for hver ekstra rekke med 5 bord. Læreren (20) forsøker å få elevene til å se på hva som er konstant i hver figur og hva som endres. Dialogen kunne dermed fortsatt slik at elevene hadde funnet ut hva de måtte justert når de doblet. I stedet gikk dialogen videre mot kontekstuell strategi. Simen (21) og Anders (22) oppdager at det alltid er plass til én person på hver ytterkant. Ved veiledning fra læreren oppdager de deretter at det er plass til fem personer på hver langside i figur 5, og forstår at det da må være plass til 20 personer på hver langside i figur 20. Ut fra denne informasjonen klarer de å regne seg frem til antall personer det er plass til rundt 20 bord. I denne dialogen ble det funnet bruk av hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. Det er også mulig at tellestrategien ble brukt i starten av oppgaven, men dette kan ikke konstateres sikkert da elevene ikke teller høyt eller viser det tydelig på en annen måte.

Når elevene beveger seg over til kontekstuell strategi befinner de seg på et faktuelt generaliseringsnivå. Elevene bruker konkrete tall for å snakke om strukturen i mønsteret på figurnummer 4 og 5. De påpeker at det alltid kan sitte en på hver ytterkant og har dermed sett det generelle i det spesielle. Martine (27) uttrykker også at det kan sitte 4 personer på hver langside i figur 4, fordi det er 4 bord i dette figurnummeret. Hun viser derfor at hun har oppdaget en sammenheng mellom antall personer som kan sitte på én langside og figurnummeret. De uttrykker ikke eksplisitt at dette gjelder for alle figurer, men viser at de generaliserer ved at de beskriver figurnummer 20 med utgangspunkt i at det kan sitte 20 personer på hver langside og 2 på ytterkantene. Generaliseringen til denne gruppen kommer frem ved hjelp av ord og gester.

Når Simen (21) sier at det alltid sitter to personer ytterst, presiserer Anders (22) hvor de to personene sitter ved hjelp av gester, der han peker på en konkret figur for å vise. Læreren (23) bruker også gester når den spør om hvor mange som kan sitte på langsidene, noe som kan tydeliggjøre hva læreren mener med langsidene. Både Simen (24) og Anders (26) bruker peking til å henvise til de bestemte delene av figuren de omtaler. Martine (27) teller med fingeren etter hun har sagt hvor mange det er plass til på en langside i figur 4, sannsynligvis for å illustrere for de andre hvor de sitter i figuren. Når Martine (29) beskriver figur 20, som de ikke har tegnet opp, bruker hun også fingerbevegelser til å vise hvor i figuren de ulike personene hun snakker om kan sitte. Gester blir brukt aktivt i denne dialogen både til å henvise til deler av figuren og som et tillegg til det som kommer frem ved tale.

Dialog 3

I denne dialogen skulle elevene på gruppe 2 lage en regel for hvor mange personer som kan sitte ved et hvilket som helst antall bord.

142 Lærer: Martine, er du med på det hvis vi skal finne x bord?

143 Martine: Hva er x bord?

144 Lærer: x kan stå for hva som helst. For eksempel sa jeg 77, da sa Jonas:

145 Jonas: 2 ganger 77, det var lett og så pluss 2

146 Lærer: Men hvis bordet er ukjent, kan vi kalle det x

147 Jonas: Da blir det gange ... men du må jo vite hvor mange du skal gange med...

148 Lærer: x kan være et hvilket som helst tall, vi vet ikke tallet, men vi må vite hvordan vi kommer frem til svaret. x kan for eksempel være 1 million bord, hvordan finner du ut det?

*149 Jonas: Gange to, vi ganger en million med 2 siden vi har like mange på hver side *peker på begge langsidene* eh pluss 2 på sidene *peker på personene på hver ytterkant**

150 Lærer: Ja, og hvis du skal ha bord x da?

151 Jonas: Vi kan gange x med 2

152 Lærer: Ja

*153 Anders: Så det står x her og her? *peker på langsidene av bordet**

154 Jonas: Ja for vi skriver x i stedet for 1 million ... eh vi bytter bordtallet med x

155 Anders: Og så pluss 2 for de på sidene

156 Jonas: Ja pluss 2

157 Martine: Men er x 1 million eller 77? Jeg skjønner ikke hvorfor vi ikke bare kan skrive tallet

158 Jonas: x kan være akkurat det tallet du vil

Anders skriver* $x \cdot 2 + 2$ *på tavlen

I starten av denne dialogen foreslår læreren å bruke en ubestemt kvantitet *x*, men elevene fortsetter å bruke konkrete tall. I Jonas sin uttalelse (147) kan det virke som om han ikke forstår *x* som en uavhengig variabel, men heller ønsker å knytte den ubestemte kvantiteten til et konkret tall. Når Jonas (149) skal forklare hvordan man finner 1 million bord uttrykker han at de multipliserer figurtallet med 2, fordi det er plass til like mange på hver langside av bordet. Selv om han ikke uttrykker det eksplisitt, viser han forståelse for at figurnummeret er det samme som antall personer som kan sitte ved én av bordets langsider. Han sier videre at de adderer med 2, og uttrykker implisitt at dette representerer de to personene som sitter på hver ytterkant ved hjelp av peking. Etter hvert erstatter han 1 million med en ubestemt kvantitet *x* og uttrykker at *x* representerer «bordtallet», altså figurtallet. De fleste elevene på gruppen ser ut til å ha forstått at *x* er generelt og kan stå for et hvilket som helst tall. Martine (157) ønsker fremdeles å knytte *x* til et konkret tall, og uttaler at hun ikke forstår hvorfor man ikke kan bruke tallet (figurnummeret) man skal finne, fremfor å bruke *x*. Ved hjelp av peking og uttalelsen om at det er plass til like mange personer på hver langside, kan man se at elevene benytter informasjon fra oppgaven til å lage en generell regel. Regelen kommer først frem i et spesifikt tilfelle før elevene etter hvert kommer frem til en formel ved å generalisere denne ved hjelp av figurenes utforming. Et annet moment i kontekstuell strategi er at det ofte er relatert til en telleteknikk. Det kommer ikke frem at elevene bruker en telleteknikk i utdraget over, men som nevnt under dialog 1 har elevene tidligere i denne oppgaven brukt tellestrategien for å oppdage sammenhenger i mønsteret. Elevene bruker også her gester til å henvise til ulike deler av figurmønsteret, som man kan se hos Jonas (149) og Anders (153).

I Jonas sitt utsagn (149) befinner han seg på faktuell generalisering. Han bruker konkrete tall for å uttrykke generalitet, og forklarer strukturen i mønsteret. Elevene har allerede blitt introdusert for den ubestemte kvantiteten x i starten av dialogen, og man kan se at elevene beveger seg rett fra faktuell generalisering til symbolsk generalisering. Jonas (154) bytter ut det konkrete tallet 1 million med x, og videre skriver Anders $x \cdot 2 + 2$. Jonas (154) forklarer at man «bytter bordtallet med x», altså at x representerer figurnummeret, og Anders (155) forklarer kontsantleddet 2 med at det representerer de to personene som kan sitte på ytterkantene. De har altså uttrykt regelen med alfanumerisk notasjon, og forklart regelen ved å kommentere hva konstantleddet og variabelen i uttrykket representerer.

For at noe skal bli kategorisert som algebraisk tenkning må det ifølge Radford (2018) være oppfylt tre krav. Elevene i denne dialogen regner først med gitte tall, men tar etter hvert i bruk den ubestemte kvantiteten x. Det første kravet er derfor oppfylt, fordi de bruker ubestemte kvantiteter. Det andre kravet er også oppfylt, fordi de klarer å operere med den ubestemte kvantiteten. Den ubestemte størrelsen blir uttrykt gjennom alfanumerisk symbolikk, som Radford ikke mener er et krav, men det vil gjøre at beregningene mer presis og effektiv. Det siste kravet er også oppfylt, og det kan vi se ved at Anders skriver formelen $x \cdot 2 + 2$ på tavlen. Det vil si at elevene forholder seg analytisk til det første og andre kravet, og kan regne med den ubestemte kvantiteten selv om den ikke er kjent. Ut fra dette har elevene i denne dialogen tenkt algebraisk, ifølge Radford (2018).

5.2.3 Gruppe 3

Dialog 1

Gruppe 3 startet oppgaven om bordproblemet på denne måten:

Ådne tegner tre bord og lager to like lange streker, én på hver langside av bordet og en kortere strek på hver ytterkant

*1 Camilla: Disse her *peker på streken på en langside* pluss disse *peker på den andre langsiden* er 6*

Camilla skriver 6=8+2=10 på tavlen

2 Lærer: Hvorfor blir det pluss to?

3 Camilla: Fordi vi har de 6, og siden det alltid er 2 på sidene blir det 8. Hvis du legger til et nytt bord er det plass til 2 til

4 Erik: Så da er det plass til 10 på fire siden det var 8 på tre

Når Ådne tegner opp bordene og lager en strek på hver langside og hver ytterkant, i tillegg til at Camilla (1) adderer langsidene samlet, kan det tyde på at de bruker informasjon fra figuren som er i oppgaven og er på vei mot å lage en formel, altså kontekstuell strategi. I denne oppgaven skulle elevene finne figurnummer 4, og man ser at fokuset ligger på figuren før og hvordan mønsteret utvikler seg fra element til element. Camilla (3) legger merke til at dersom de legger til et nytt bord vil de få plass til to ekstra personer, og adderer derfor antall personer det er plass til rundt tre bord med 2. Erik (4) går også ut fra sammenhengen med bordet før, når han forteller hvor mange det er plass til rundt fire bord. Når elevene har denne tankegangen har de lagt merke til noe generelt, men de vil likevel være avhengig av å kjenne til figurtallet til figuren foran i rekken. Ved denne metoden er det også mulig å regne seg frem til ønsket figurnummer ved gjentatt addisjon av 2 eller ved bruk av 2-gangen. Elevene har dermed brukt rekursiv strategi i sin løsning av denne oppgaven.

Elevene på gruppe 3 bruker streker som representerer antall personer det er plass til rundt et bord, som kan relateres til bruk av ubestemte kvantiteter. Vi kan dermed si at det første kravet til Radford (2018) er oppfylt. Videre bruker de disse strekene til å forklare at de to lengste strekene til sammen representerer tallet 6, altså en lang strek står for tallet 3. De forklarer videre at man må legge til 2, som står for de personene det er plass til på hver ytterkant. Elevene har oppfylt det andre kravet til Radford, som er representasjoner med ubestemte kvantiteter og operasjoner med dem. To av kravene for algebraisk tenkning er oppfylt og vi kan dermed si at elevene er på vei til å tenke algebraisk, ifølge Radford (2018).

Dialog 2

På deloppgave c) utspiller dialogen til gruppe 3 seg på følgende måte:

32 Lærer: Okei, nå har dere funnet hvor mange som kan sitte på 6 bord ... men hva med 20 bord da?

*33 Camilla: Så da blir det 14 ... *skriver 14 i raden der det står 20 bord* og 2 gange 20 *skriver det ved siden av 14**

*34 Camilla: *skriver 14 + 40 på tavlen* Okei 14 + 40 er lik ...? *ser mot Ådne**

35 Ådne: 54

Camilla skriver 54 personer på tavlen

36 Lærer: Hva har vi gjort her?

37 Camilla: Vi har plusset 40 fordi det er 20 bord og to ekstra personer for hver

38 Erik: Og så har vi 40 +14

39 Lærer: Hvor kommer de 14 fra da?

*40 Camilla: Det er de 6 bordene *peker på utregningen av personer for 6 bord**

41 Lærer: Okei ... men når du ganget med 20, hvorfor gjorde du det?

42 Camilla: Det er fordi at det er 20 bord

43 Lærer: og hva er 20 + 6 da?

44 Erik: 26

45 Lærer: Ja, men skal ikke vi bare ha 20 bord?

*46 Camilla: Jo ... *hvisker bort* $2 \cdot 20$ *og skriver* $2 \cdot 14$**

47 Erik: hmm 14+14 ... det er 28

Camilla skriver 14+28

48 Ådne: Det er ... ehm 42

Camilla skriver 42 personer på tavlen

Elevene har tidligere regnet ut hvor mange personer det er plass til rundt 6 bord, og bruker denne informasjonen til å regne seg frem til hvor mange personer det er plass til rundt 20 bord. De bruker informasjonen om at det er plass til 14 personer rundt 6 bord, og velger først å addere 14 med 40, fordi de vet at antall personer vil øke med 2 for hvert bord som legges til. Etter at elevene får hjelp fra læreren, oppdager de at de ikke kan addere 14 med 40, for da vil de finne antall personer det er plass til rundt 26 bord. Elevene gjør deretter justeringer og ser at de må legge til personer for 14 nye bord på de 6 bordene de allerede har funnet. Ettersom de allerede har oppdaget at det legges til 2 personer for hvert bord, multipliserer de 14 med 2 og får 28. På denne måten kommer de frem til at det er plass til 42 personer rundt 20 bord, ved at de tar 14 addert med 28. Strategien elevene har brukt i denne dialogen kan ligne på beskrivelsen til rekursiv strategi, fordi de ser på tidligere figurer i mønsteret og bruker den rekursive sammenhengen til å regne seg frem til ønsket figurnummer. Selv om strategien elevene bruker kan ligne på rekursiv strategi, vil vi ikke kategorisere denne strategien som rekursiv, fordi de ikke trenger å finne de 19 forrige figurene før de kommer frem til antall personer det er plass til rundt figur 20. Strategien elevene bruker i denne dialogen er grupperingsstrategien. Denne strategien kjennetegnes ved at elever bruker et figurtall de vet fra før, og bygger på denne med en rekursiv sammenheng.

Dialog 3

I denne dialogen skal gruppe 3 finne ut hvor mange bord man trenger til 30 personer.

72 Camilla: Vi trenger ... ehm 21
73 Ådne: Jammen 20 bord er jo 42 personer
74 Camilla: Okei 42 minus 12 er 30, da har vi 12 personer for mye
*75 Erik: Men se her da! *peker på figurnummer 5* Der er jo svaret 12*
76 Camilla: Vi kan ta bort 12 personer da. 20 minus 5 er 15
77 Ådne: Men skulle vi ikke ta bort 12?
78 Camilla: Vi tar bort 5 bord, fordi det er 12 personer
79 Ådne: Åja, så vi trenger 15 bord da

Elevene tar utgangspunkt i en allerede kjent verdi og bruker denne informasjonen til å regne seg frem til hvor mange elementer det er i en større og mindre figur. Dette kan minne om hel-objekt strategien, men til forskjell fra hel-objekt strategien bruker ikke elevene prinsippet om proporsjonalitet og multiplikasjon eller divisjon. I denne dialogen kan man heller ikke utelukke at det er en viss grad av prøve og feile strategien involvert. Camilla begynner med å si at man trenger 21 bord, uten noen forklaring på hvorfor dette kan stemme. Ådne responderer raskt med å si at 21 bord ikke kan stemme, fordi figurnummer 20 har plass til 42 personer. Fokuset går videre over til å ta utgangspunkt i allerede kjente verdier. Camilla (74) oppdager at hvis de har 20 bord, har de plass til 12 personer mer enn det de skal finne. Erik (75) bruker så peking til å rette gruppens oppmerksomhet mot figurnummer 5, der han opplyser om at «svaret» (figurtallet) er 12. De bruker denne informasjonen til å regne seg frem til et svar på hvor mange bord de trenger for å få plass til 30 personer. Hel-objekt strategien kjennetegnes med at elevene tar i bruk multiplikasjon eller divisjon for å regne seg frem til hvor mange elementer det er i en større eller mindre figur, og at denne strategien kan føre til over- eller undertelling. I dette tilfellet har ikke elevene brukt multiplikasjon eller divisjon, men strategien de har brukt har ført til overtelling og elevene har fått feil svar. Ved å subtrahere figurnummer 20 med figurnummer 5 har elevene fjernet de to personene som sitter på ytterkantene, og tror derfor at de trenger ett bord mer enn det som er nødvendig. Ut fra rammeverket vi bruker for å kategorisere strategier passer ikke denne strategien helt innenfor hel-objekt strategien ettersom de ikke bruker prinsippet om proporsjonalitet og multiplikasjon eller divisjon. Strategien elevene har brukt her vil derfor være det vi har valgt å kalle for del-hel strategien, fordi de bruker figurer de kjenner til fra før og benytter subtraksjon for å komme frem til ønsker figurnummer. Bruken av strategien førte også til overtelling, som del-hel strategien kan gjøre uten de nødvendige justeringene.

Dialog 4

Her arbeider elevene på gruppe 3 med oppgaven der de skal lage en regel for hvor mange personer det er plass til rundt et hvilket som helst antall bord.

*139: *Camilla skriver «et bord= 1 på toppen, to bord= 2 på toppen, tre bord = 3 på toppen**
*140: *Camilla skriver eks. 100 000 på toppen og 100 000 på bunnen og 2 på siden**
141 Erik: Hva driver du med?
142 Camilla: Ehm så for eksempel 1 bord er en person på toppen.. så for eksempel kan det være 1 million bord, så 1 million på toppen og det samme på bunnen pluss 2 som da blir for eksempel 2 millioner og 2

Det kan se ut som at Camilla ser en sammenheng mellom figurnummer og antall personer som kan sitte på langsidene av bordet når hun skriver en liste over antall bord og antall personer på øvre langside av bordet. Hun viser deretter et eksempel med 100 000 bord skriftlig, og sier et eksempel med 1 million bord muntlig. Det er derfor sannsynlig å tro at hun har sett en sammenheng som kan brukes i alle tilfeller, men fordi hun ikke påpeker dette selv kan det ikke sies å være en generell regel. Hun bruker tydelig informasjon fra oppgaven og beveger seg mot en generell regel, men setter ikke ord på det. Gruppen sin bruk av kontekstuell strategi har derfor ikke ført frem til en fullstendig løsning på oppgaven.

I denne dialogen befinner elevene på gruppe 3 seg på et faktuelt generaliseringsnivå, fordi de ikke har navngitt den ubestemte kvantiteten. De bruker heller konkrete tall for å uttrykke en generell sammenheng. I denne dialogen påpeker ikke elevene at sammenhengene de har oppdaget gjelder for alle tilfeller. Likevel viser de at figurtallet samsvarer med antall personer som kan sitte på en langside ved Camillas liste (139), og de bruker denne sammenhengen på et mye høyere tall, noe som kan indikere at de har forstått at det gjelder for alle tilfeller. Gruppen viste også tidligere (i deres dialog 1) at de er klar over at det alltid er plass til to personer på ytterkantene.

5.3 Oppgave 2 – det voksende mønsteret

I den andre økten fikk elevene presentert følgende oppgave:

Under ser dere de tre første figurene i et mønster.

Figur 6: Det voksende mønsteret

a) Hvordan vil du tegne den neste figuren?
b) Hvor mange blå sirkler er det i figur 8?
c) Hvor mange blå sirkler trenger man for å lage figur 25?
d) Forklar hvordan man kan finne ut hvor mange blå sirkler man trenger for å lage en hvilken som helst figur
e) Hvordan kan du finne ut hvor mange blå sirkler du trenger for å lage figur *n*?

I likhet med bordproblemet har denne oppgaven også et mønster som øker lineært. Dette figurmønsteret vokser med tre sirkler fra figur til figur. En eksplisitt formel for antall sirkler vil være $An = 3n + 1$, der An står for antall sirkler og *n* står for figurnummeret.

I starten av denne økten fikk elevene kun presentert de tre første figurene i mønsteret og deloppgave a). I motsetning til oppgaven med bordproblemet, fikk de ingen kontekst til oppgaven her. På samme måte som i første økt, dukket det opp flere oppgaver (deloppgave b, c, d og e) på den digitale tavlen etter hvert, uten at det ble annonsert av lærerne. På slutten av økten presenterte hver gruppe fremgangsmåten sin til de andre gruppene.

5.3.1 Gruppe 1

Dialog 1

Gruppe 1 startet oppgaven om det voksende mønsteret på denne måten:

*1 Marit: Jammen da begynner vi fra starten så vi husker det *tegner figur 1 på tavlen**
*2 Petter: 1, 2, 3, 4 *peker med fingeren på tavlen* Og så må du skrive 1-tallet over*
*3 Marit: *tegner opp figur 2* Det er fem på den andre og sju på den tredje *peker på den horisontale linjen**
*4 Andreas: *tegner figur 3* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*
5 Marit: Da må det være ... fordi det er en mer på 3, da må det være en mer bortover
6 Petter: 9, det kan jo ikke være 8
*7 Marit: Det er 9 ja, fordi se *peker på den horisontale linjen på figur 1 og 2* fordi 3 pluss 2 er 5*
*8 Andreas: Da må det være 4 her *peker vertikalt på midten av den horisontale streken**
*9 Petter: *tegner sirkler vertikalt fra den midterste sirkelen* 1, 2, 3, 4. Nå er det 4*
*10 Andreas: *peker på hver sirkel i den horisontale linjen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *peker på sirklene i den vertikale linjen* 1, 2, 3, 4*
11 Petter: Okei så 9 pluss 4 er 13, da har fireren 13 sirkler

Gruppen begynner systematisk med å tegne opp den første figuren i mønsteret. Petter (2) teller også høyt mens han peker på sirklene i figuren. Når Marit (3) har tegnet opp figur 2 på tavlen uttrykker hun at det er 5 sirkler på «den andre» (figur 2) og 7 sirkler på «den tredje» (figur 3). Dette utsagnet ville i utgangspunktet vært feil, men på grunn av pekingen hennes kan det tyde på at hun tar utgangspunkt i hvor mange sirkler hver figur har i den horisontale linjen. Marit (5) sier først at det er en sirkel mer på figur 3, noe som hadde stemt om hun mente at det var en sirkel mer for hver utstikker. Etter innspill fra en av gruppemedlemmene, Petter (6), ser Marit at det er 9 sirkler i den horisontale linjen på figur 4. Hun argumenterer for dette ved at i figur 1 er det 3 sirkler og så legges det til 2 i figur 3, slik at det er 5 sirkler i den horisontale linjen. Hun har altså tatt utgangspunkt i hvor mange sirkler som legges til i de forrige figurene og mener at det samme også må gjelde for figur 4. Dette viser til en rekursiv tankegang, men de ender likevel opp med å tegne hele figuren og deretter telle antall sirkler. De har altså brukt tellestrategien til å komme frem til svaret, selv om de underveis oppdager en rekursiv sammenheng. Elevene viser tydelig måten de ser mønsteret på ved pekingen de gjør mens de teller. De ser mønsteret som en horisontal og en vertikal linje, noe som kan gjøre det vanskeligere for elevene å komme frem til en formel som gir mening ut fra figurtallet. I denne dialogen har elevene brukt tellestrategien.

Petter (2) og Andreas (10) peker på sirklene på tavlen samtidig som de teller. Når Marit (3) sier at det er 5 på «den andre» og 7 på «den tredje» gjør pekingen hennes at det hun sier stemmer overens med figuren. Dersom hun ikke hadde pekt på de vertikale linjene ville ikke meningsinnholdet kommet korrekt frem, da figur 2 består av 7 sirkler i sin helhet, og figur 3 består av 11 sirkler. Det hun sier blir likevel riktig fordi det er 5 sirkler i den horisontale rekken på figur 2 der hun peker. Marit (7) og Andreas (8) bruker også peking til å henvise til bestemte deler av figuren, der pekingen gir uttrykk for det de ikke sier med ord.

Dialog 2

Da gruppe 1 skulle finne ut hvor mange sirkler figur 8 består av, som er oppgave b), gjorde de det på denne måten:

15 Petter: Hvor mange blå sirkler er det i figur 8?
16 Andreas: Hæ? Da må vi tegne flere
17 Petter: Skal du ha 8 bortover da?
*18 Marit: Da må vi ta 11 bortover *begynner å tegne figurnummer 5* Vi plusser på 2 hver gang.*
*19 Marit: *tegner 11 sirkler* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11*
*20 Petter: Og så tar du der *peker på den midterste sirkelen på den horisontale linjen med sirkler* 1, 2, 3, 4, 5. Og så skriver du figur 5 på toppen*
21 Petter: Og så tegner du neste

Her slutter elevenes bruk av denne strategien, og de går videre med en annen strategi.

Elevene har tidligere tegnet opp figurnummer 1-4. Når de skal finne figurtallet til figurnummer 8 påpeker Andreas (16) at de må tegne alle figurene frem til figurnummer 8, for å komme frem til svaret. Marit (18) sier at de må ha 11 sirkler i den horisontale linjen på figur 5, og begrunner det med at de må addere med 2 for hver figur i den horisontale linjen. Rekursiv strategi går ut på at man beskriver sammenhengen mellom en figur og den påfølgende, og er avhengig av å vite hvor mange elementer den forrige figuren består av for å lage neste. Marit (18) beskriver denne sammenhengen ved at det legges til to i den horisontale linjen, og de bruker figuren før for å tegne opp figurnummer 5. Elevene bruker derfor rekursiv strategi i denne dialogen. De tegner så figurnummer 5 ferdig ved å tegne 5 sirkler vertikalt. Når de skal gå videre til figurnummer 6, går de over til hel-objekt strategi. Dette skjer fordi en elev sier at man bare kan doble figurnummer 4 for å finne ut hvor mange sirkler det er i figurnummer 8. Hvordan de gikk videre på oppgaven kan vi se i dialog 3.

Dialog 3

I dette utdraget har elevene tidligere arbeidet med oppgaven der de skal finne ut hvor mange sirkler det er i figurnummer 8, der de brukte rekursiv strategi. I dialogen under arbeider de med samme oppgave, men de har tatt i bruk en ny strategi for å komme frem til svaret på oppgaven.

Marit tegner opp figurnummer 5
21 Petter: og så tegner du neste
*22 Marit: *peker på figur 4* men hallo hva er neste? Det er den *peker på oppgaven der det står 8**
*23 Andreas: Vi bare dobler den her *peker på figur 4* så finner vi ut*
24 Petter: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Da er det 26
25 Andreas: Jammen du må doble bortover først, og så teller du
26 Petter: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
27 Mathias: det er 18
*28 Marit: Da kan jeg tegne 18 bortover *tegner 18 sirkler horisontalt**
29 Andreas: og så 8 nedover
Marit tegner 9 sirkler nedover
*30 Petter: nei der 8, se på den da *peker på figur 4* der er det 4 nedover, og her *peker på figur 5* der er det 5 nedover*
31 Andreas: 8 + 18 er 26 ... så svaret er 26

Når Marit tegner figur 5 og Petter (21) ber henne tegne den neste figuren, befinner elevene seg på tellestrategien. Marit (22) oppdager at 8 er det dobbelte av 4 og foreslår at de kan doble figurnummer 4, noe som leder gruppen inn på hel-objekt strategi. Her bruker Andreas de tidligere svarene de har kommet frem til for å finne ut hvor mange sirkler figurnummer 8 består av. Han benytter antall sirkler figurnummer 4 består av (13 sirkler) og dobler dette, men glemmer å gjøre en justering for å unngå over- eller undertelling. Ved å multiplisere figurtallet med to får han med at alle «armene» ut fra den sirkelen i midten dobles, men de får en ekstra sirkel fordi de legger til sirkelen i midten to ganger. Dette viser at elevene ikke ser en sammenheng i hvordan mønsteret er bygd opp når de løser oppgaven, men prøver å ta en snarvei ved å doble en figur de allerede har funnet. Elevenes løsning ved bruk av hel-objekt strategien fører til overtelling og de ender opp med feil svar. Elevene i denne dialogen bruker peking aktivt til å henvise til de ulike figurene, dette ser man hos Marit (22), Andreas (23) og Petter (30). Elevenes bruk av peking for å henvise til figurnummer kan tyde på at de mangler ord for å beskrive hvilken figur de snakker om.

Dialogen til gruppe 1 fortsetter med at læreren utfordrer elevenes bruk av hel-objekt strategien:

35 Lærer: Er dere sikker på at det er 26 blå sirkler i figur 8?
36 Petter: Ehm ... ja den er jo dobbelt så stor som figur 4
37 Lærer: Hmm, jeg er ikke så sikker ... Hvis dere dobler figur 2 hvor mange får dere da?
38 Marit: Ehm 7 ...
39 Andreas: Så da er det 14 på nummer 4
*40 Petter: *teller sirkler i figur 4* 1, 2, 3, ... 11, 12, 13*
41 Andreas: Da er det ikke riktig da, da må vi gjøre alle på nytt
*42 Marit: Vi mangler en sirkel her *peker på figur 4*.*
*43 Marit: *peker på figur 2* 7, 7 blir 14, her er det 13 *peker på figur 4**
*44 Andreas: Ja da mangler det en sirkel her *peker på figur 4**
45 Petter: Det gjør jo ikke det
46 Andreas: Jo fordi vi dobla det
47 Lærer: Okei, men doble figur 1 da
*48 Petter: 1,2,3,4 *peker på figur 1* hvis vi dobler er det 8*
*49 Andreas: *peker på figur 2* 1,2, 3, 4, 5, 6, 7*
50 Lærer: Figur 1 og 2 er jo riktig laget, de står jo på tavlen
51 Petter: Er det 25 på 8?
52 Andreas: Kanskje det ikke går å doble?

Læreren spør om elevene er sikre på at det er 28 sirkler i figur 8, slik de har kommet frem til tidligere. Petter (36) svarer at den er jo dobbelt så stor som figur 4. Det kan virke som om Petter ikke fokuserer på figurtallet her, men at 8 er et dobbelt så stort tall som 4. Selv om elevene hadde laget figur 4 riktig tidligere i oppgaveløsningen begynner de å tvile (41) når de oppdager at figur 4 ikke har dobbelt så mange sirkler som figur 2 (40). Marit og Andreas mener at det derfor mangler en sirkel i figur 4, uten å påpeke hvor denne sirkelen skal plasseres. Petter (45) er uenig i at de mangler en sirkel, men Andreas (46) argumenterer med at de har doblet antallet sirkler og da må det være en til. Læreren (47) ber deretter elevene om å doble figur 1, slik at de kan sammenligne med figur 2. Petter og Andreas oppdager ved hjelp av tellestrategien at figur 2 ikke har dobbelt så mange sirkler som figur 1, der læreren påpeker at figur 1 og 2 er riktig laget (50). Det blir da foreslått (51) at det kan være 25 sirkler i figur 8. Det uttrykkes ikke hvorfor det kan være 25 sirkler i figur 8 fremfor 26 som de fant ved dobling. Det kan likevel tenkes at de oppdaget at figur 2 har dobbelt så mange sirkler som figur 1 minus en sirkel og at de derfor tenker at dette gjelder for figur 8 og 4 også. Elevene kan derfor være på vei til å se hvordan de kan bruke hel-objekt strategien med justering for å unngå overtelling. Elevene bruker gester i denne dialogen som en støtte til å telle (40) og for å henvise til figurnummer (42, 43, 44, 48 og 49).

Dialog 4

I denne dialogen arbeider elevene i gruppe 1 med deloppgave d), der de skal forklare hvordan man kan finne ut hvor mange blå sirkler man trenger for å lage en hvilken som helst figur.

139 Marit: Tegn en stor T
140 Andreas: Vi må ta 10 000
Marit tegner en stor T og skriver 1 på midten av den horisontale linjen
*141 Andreas: 10 000 der *peker til venstre* og så 10 000 der *peker til høyre* ... og da er det 10 000 nedover*
142 Petter: Det er 30 000 og en
Marit skriver 10 000 3 ganger under hverandre og 1 under der
*143 Petter: 1,2,3 *peker på stedene det står 10 000 på T-en de tegnet på tavlen* og 1 *peker på krysningspunktet i T-en*. Vi trenger ikke T lenger!*
144 Lærer: Okei fungerer dette for alle tall?
145 Marit: Ja, uansett hvor stor figuren er så kan vi plusse sammen tallet 3 ganger og det er alltid en i midten
146 Lærer: Hvordan kan vi skrive at det er en regel for alle tall da?
147 Andreas: Ehm vi kan sikkert gjøre det vi gjorde sist, vi kaller tallet for n
148 Marit: n?
149 Andreas: Ja for n kan bety det tallet man vil ha

Andreas skriver N til venstre, høyre og under den store T-en og 1 på midten av den horisontale linjen i T-en

150 Marit: N pluss N pluss N pluss 1

Petter setter regnestykket under hverandre på tavlen

Når elevene starter med å tegne en T fremfor å tegne sirkler viser de at de evner å benytte en mer hensiktsmessig representasjonsform. De skriver også 1 på midten av T-en ganske raskt som viser at de har sett at mønsteret bygges opp med en sirkel i midten og 3 like store utstikkere ut fra denne. Elevene benytter konkrete tall i forklaringen sin, men de bruker ikke tall på en figur de har tegnet eller kan se for seg, da 10 000 er et relativt høyt figurnummer. Marit (145) uttrykker også generalitet vet å si at de kan gjøre dette uansett hvor stor figuren er. Når læreren (146) spør om hvordan de kan skrive denne regelen for alle tall, foreslår Andreas (147) at de benytter en ukjent variabel (n) «slik de gjorde sist». De benytter deretter den uavhengige variabelen *n* i stedet for konkrete tall, og forklarer (149) at *n* kan bety «det tallet man vil ha». Andreas sitt utsagn (149) kan tyde på at han forstår at *n* kan byttes ut med det figurnummeret de ønsker å finne figurtallet til. Elevene kommer til slutt frem til en formel ved hjelp av informasjon de får fra oppgaven. Selv om formelen kunne blitt trukket sammen og blitt skrevet som $3n + 1$, har de kommet frem til en fungerende formel for å finne antall sirkler i en hvilken som helst figur. Ettersom elevene har laget en formel ut fra informasjonen som blir gitt i oppgaveteksten, blir dette kategorisert som kontekstuell strategi.

I starten av denne dialogen befinner elevene seg på et faktuelt generaliseringsnivå. De navngir ikke de ubestemte variablene, men bruker heller det konkrete tallet 10 000 i forklaringen sin. De viser strukturen av hvordan mønsteret er bygget opp ved å tegne en T og plassere det konkrete figurnummeret i hver utstikker av denne, samtidig som de skriver 1 i krysningspunktet til t-en for å symbolisere at det er en ekstra sirkel i midten av figuren. De forklarer også at denne oppbyggingen gjelder for alle figurer. Ved Marit (145) sitt utsagn beveger de seg videre til kontekstuell generalisering fordi hun sier at uansett hvor stor figuren er (figurtallet), kan man addere figurnummeret med seg selv 3 ganger og addere med 1, grunnet sirkelen i midten. Den ubestemte variabelen blir her navngitt som «tallet» (på figuren). Etter hvert tar de i bruk den ubestemte kvantiteten *n* (147) og lager en regel med denne. De forklarer hva den ubestemte kvantiteten står for, og skriver regelen $n + n + n + 1$. Dette gjør at de kommer seg til et symbolsk generaliseringsnivå, fordi de uttrykker en regel med alfanumerisk notasjon og er i stand til å forklare både variabelen og konstantleddet i denne.

Radford (2018) sine tre krav for algebraisk tenkning er også oppfylt i denne dialogen. Det første kraver er oppfylt på grunn av at elevene bruker den ubestemte kvantiteten n. Det andre kravet er også oppfylt fordi de bruker den ubestemte størrelsen og opererer med den. Den ubestemte størrelsen har de også uttrykt gjennom alfanumerisk notasjon, noe som gjør at de kan gjøre beregninger på en effektiv måte. Det kan vi se når de skriver regnestykket $n + n + n + 1$. Denne gruppen viser forståelse for at n kan stå for et hvilket som helst tall og adderer med den ukjente variabelen som om den var kjent. De oppfyller med dette det siste av Radford sine krav for algebraisk tenkning. Elevene har vist høy grad av algebraisk tenkning når de har tatt i bruk kontekstuell strategi i denne dialogen.

Andreas (141) bruker peking til å beskrive bestemte deler av figurmønsteret når de skal lage en representasjon med det figurnummeret de har valgt. Petter (143) bruker peking når han teller opp hvor mange ganger figurnummeret er representert i figuren. Dette gjør at han oppdager at de ikke har behov for en visuell representasjon lenger, noe som kommer frem ved at han sier at de ikke trenger T-en lenger.

5.3.2 Gruppe 2

Dialog 1

Gruppe 2 startet oppgaven på denne måten:

1 Lærer: Her ser dere de første tre figurene i et mønster. Deres oppgave er hvordan dere vil tegne den neste figuren
*2 Anders: *teller hvor mange sirkler det er i figurnummer 1, 2 og 3* Skal det være sju?*
3 Jonas: Ja
*4 Martine: Du skal ha sju der oppe *lager en horisontal linje i luften* også to mer, så da blir det ni*
5 Anders: Og så skal det være 4
Anders ser på hvordan figurene forandrer seg og tegner 10 sirkler vannrett og 4 sirkler lodrett
6 Jonas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
7 Anders: Skal det være 6?

8 Jonas: Ja

*9 Anders: Nå gjør du meg usikker *tegner figuren på nytt**

10 Anders: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, det skulle være 9 der oppe

11 Jonas: Ja

12 Anders: Det var jo 9! Da er vi ferdig

Elevene begynner med å telle antall elementer i de tre første figurene i figurmønsteret. Ut fra dette finner en elev ut (Martine) at det neste figurnummeret øker med 2 i den horisontale raden med sirkler. Martine (4) sitt utsagn viser en rekursiv tankegang, men denne oppdagelsen blir ikke brukt videre. Det virker ikke som at Anders stoler på det Martine sier, og velger å tegne figurnummer 4 på tavlen, slik at han får mulighet til å telle antall elementer og være helt sikker på svaret sitt. Elevene kommer til slutt frem til at figurnummer 4 består av 9 sirkler i den horisontale raden, men sier ikke hvor mange sirkler den består av i sin helhet. Elevene har tegnet figurnummer 4 på tavlen sin riktig, som består av 13 sirkler. De har bare ikke skrevet eller sagt at figurnummer 4 består av 13 sirkler. Elevene på denne gruppen har brukt tellestrategien for å komme frem til svaret sitt, fordi de har laget en modell av figuren og telt elementene den består av.

Dialog 2

I denne dialogen går gruppe 2 videre på den andre deloppgaven, der de skulle finne ut hvor mange sirkler figur 8 består av. Her brukte de en annen strategi enn de hadde gjort tidligere.

13 Anders: Hæ, 8? ... Den vet jeg også

*14 Martine: *tegner figur 5* 16. Vil du tegne figur 6, Adrian?*

*15 Jonas: Ja *ser på figurnummer 5 og bruker den til å lage figurnummer 6* 19*

*16 Martine: *ser på figurnummer 6 og bruker den til å tegne figurnummer 7* 22*

17 Ingrid: Da må du tegne figur 8

*18 Martine: *tegner figurnummer 8* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *Skriver 25 sirkler med en pil til figurnummer 8**

19 Lærer: Hvordan fant dere ut at det var 25 sirkler i figurnummer 8?

*20 Martine: Vi tok 4 pluss 2 pluss 1, så 3 da. 13 pluss 3 *peker på figurnummer 4* er lik 16. Så er det 16 pluss 3 som er 19. 19 pluss 3 er 22 pluss 3 er 25*

21 Lærer: Så dere er avhengig av å se figuren som kommer før?

22 Martine: Ja, men jeg glemte at man bare kunne plusse på 3 hele tiden

Elevene bruker en rekursiv strategi ved at de er avhengig av å lage alle figurene frem til ønsket figurnummer. For å lage neste figur i rekken ser de på forrige figur, i tillegg uttrykker de at de adderer med 3 for hver figur de tegner. Selv om strategien elevene bruker tydelig er en rekursiv strategi, er det også mulig å tenke at de til en viss grad kombinerer dette med en tellestrategi. Det kommer ikke frem ved dialog eller gester, men når de ser på forrige figur og deretter lager neste er det sannsynlig at de teller sirklene i hodet mens de tegner. I tillegg kan vi se at Martine teller høyt mens hun tegner figur 8. Når læreren (19) spør hvordan de fant ut at det var 25 sirkler i figur 8, viser Martines utsagn (20) at tankegangen deres er rekursiv. Dette ser man når Martine sier at de adderer 3 på figurnummer 4, og deretter adderer 3 til på figurnummer 5 osv. Martine påpeker også at man bare kan addere med 3 hele tiden. Hun har altså sett en sammenheng ved at mønsteret øker med 3 for hvert figurnummer, men blir med dette avhengig av gjentatt addisjon.

Dialog 3

Da elevene på gruppe 2 begynte på deloppgave d), der de skulle forklare hvordan man kan lage en hvilken som helst figur, benyttet de seg av en annen strategi.

70 Martine: Er det ikke sånn at man kan starte på en prikk?

71 Jonas: Ja

72 Martine: På nummer 100 er det 100 på siden og 100 på den andre siden, og under er det 100. For på figur 3 var det tre på sidene og tre under

73 Lærer: Okei det er to eksempler, men hvordan kan jeg skrive det da som en regel?

Martine skriver x, x, x på tavlen

74 Lærer: Kan du forklare regelen til meg?

75 Martine: Hvis du har 100 så er det 100 ... ganger 3, så det blir 300

76 Anders: Ja, men det er jo en prikk i midten også

77 Jonas: Da blir det 301

78 Martine: Så det er liksom x, x, x pluss 1?

79 Anders: Men hva mener du med x, x, x?

80 Martine: Hvis det er hvilket som helst nummer liksom

81 Jonas: Så vi kan bytte x med 10 000 for eksempel?

82 Ingrid: Ja vi kan vel det med alle nummer?

83 Martine: Ja, det er x pluss x pluss x pluss 1, på grunn av den midterste og x blir hva som helst tall fordi x ikke har et bestemt tall

84 Anders: Men det er lettere med x gange 3

*85 Martine: Ja det er jo det det betyr * skriver* $3 \cdot x + 1$**... sånn!*

*86 Ingrid: Ja vi bare bytter ut x med tallet på den figuren vi skal finne. Vi kan skrive sånn her *skriver* $3 \cdot 45 + 1$ *på tavlen* hvis vi skal finne hvor mange prikker vi trenger til figur 45*

Kontekstuell strategi innebærer at elevene lager en formel ut fra den informasjonen de får oppgitt i oppgaven, og at denne informasjonen kombineres med en telleteknikk. Elevene velger å starte med en sirkel og forklarer hvor mange sirkler som går ut fra den (70). Denne måten å se mønsteret på, med en sirkel i midten og tre like lange utstikkere, kan lede elevene lettere inn på en formel. Elevene oppdaget at de kan addere med 1, på grunn av sirkelen i midten. De har også oppdaget at de tre utstikkerne til figuren har samme antall sirkler som figurnummeret (72). Når læreren (73) påpeker at det de har sagt til nå er eksempler, og minner dem på at de skal finne en regel, tar Martine i bruk den ubestemte kvantiteten x. Martine (75) starter med å forklare regelen ved hjelp av et eksempel når læreren spør om hun kan forklare regelen (74). Når Anders (79) spør hva Martine mener med «x, x, x,» gir hun en forklaring om at det kan være et hvilket som helst nummer (80). Martines forklaringer (80) og (83) kan tyde på at hun har forstått at x er en uavhengig variabel. Flere av de andre på gruppen, Jonas (81) og Ingrid (82), virker som de forstår prinsippet om at x kan være et hvilket som helst tall etter Martines forklaring. Anders (84) viser at han vil ha en regel som er enklest mulig, og forslår derfor at de skriver x multiplisert med 3, fremfor «x, x, x». Elevene kommer derfor frem til en alfanumerisk formel, der det eneste man kan pirke på er at det i korrekt alfanumerisk notasjon ikke er nødvendig å sette multiplikasjonstegn mellom 3 og x. Det kommer ikke frem i dialogen at elevene har kombinert informasjonen de får oppgitt i oppgaven med en telleteknikk, men vi kan ikke utelukke at de har brukt telling for å oppdage dette mønsteret.

I starten av denne dialogen bruker elevene konkrete tilfeller av variabelen i mønsteret for å uttrykke en regel, og befinner seg derfor på et faktuelt generaliseringsnivå. Dette ser man i Martines utsagn (72) der hun sier at det må være 100 sirkler på hver av sidene i figurnummer 100 fordi det var 3 sirkler på hver side i figurnummer 3. Når de blir bedt om å lage en generell regel (73), går Martine (78) over til å bruke den ubestemte kvantiteten x for å representere figurnummeret og sier at en regel vil være $x + x + x + 1$. Den ubestemte størrelsen og operasjonene som blir gjort, uttrykkes gjennom alfanumerisk notasjon. Martine

(83) og Ingrid (86) forklarer også regelen ved å fortelle hva den uavhengige variabelen og konstantleddet representerer i figurmønsteret. De har derfor beveget seg fra faktuell generalisering til symbolsk generalisering.

Det første kravet til Radford (2018) er oppfylt ettersom de bruker den ubestemte kvantiteten x. Det andre kravet er også oppfylt, fordi de viser at de kan bruke formelen de har laget til å regne ut antall sirkler i en hvilken som helst figur. I Martine sitt utsagn (83) adderer hun den ukjente variabelen som om den var kjent, og forholder seg følgelig analytisk til det første og andre kravet til Radford. Elevene viser derfor høy grad av algebraisk tenkning når de benytter kontekstuell strategi i denne dialogen.

5.3.3 Gruppe 3

Dialog 1

Da gruppe 3 arbeidet med den første oppgaven som var hvordan de vil tegne figur 4, begynte de oppgaven slik:

Erik tegner figurnummer 1, 2 og 3 på tavlen
1 Erik: Hvis den er sånn, må den fjerde være 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4
2 Marthe: Det er en mindre. Se, det blir bare en mer hver gang
Ådne visker bort tegningen
3 Lærer: Tegner dere figurnummer 4?
Erik tegner ni sirkler etter hverandre og fire sirkler loddrett
*4 Ådne: Her er det 7 *peker på sirklene som er horisontale i figurnummer 3**
5 Ådne: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... 8, 9. Det er riktig

Elevene på gruppe 3 starter med å telle antall elementer de tre første figurene i figurmønsteret består av, og her oppdager Erik (1) at figurnummer 4 har tre utstikkere med 4 sirkler ved å telle dem høyt. Marthe (2) sier deretter at det vil øke med en sirkel for hver gang. Dette stemmer hvis man tar utgangspunkt i at det blir en sirkel mer på hver utstikker dersom figurnummeret øker med 1. Hun har dermed oppdaget en rekursiv sammenheng i mønsteret, men benytter ikke denne til å komme frem til svaret. Ådne (4) påpeker at det er 7 sirkler horisontalt i figurnummer 3 ved hjelp av peking, og det kan virke som om de tar utgangspunkt i dette når de tegner figurnummer 4. Når de tar utgangspunkt i forrige figur på denne måten, kan det tyde på bruk av rekursiv strategi. Ettersom de ikke regner seg frem til neste figur, men heller velger å tegne den og telle alle prikkene, vil dette kategoriseres som tellestrategien. De velger å tegne figurnummer 4 og teller de ønskede egenskapene ut fra tegningen. Elevene kommer frem til riktig figur, selv om de ikke uttrykker eksplisitt hvor mange sirkler den har.

Dialog 2

Elevene tok i bruk en annen strategi da de arbeidet med den andre deloppgaven, som var å finne ut hvor mange sirkler figurnummer 8 bestod av.

6 Marthe: Skal vi lage nummer 2?

*7 Erik: *leser oppgaveteksten* hvor mange blå sirkler er det i figur 8?*

8 Ådne: Da må vi lage de andre først

9 Camilla: Nei, det skal vi ikke

10 Lærer: Er det ikke litt tungvint å tegne først figur 5, så figur 6, så figur 7 og så figur 8?

11 Erik: Nei

12 Lærer: Er det ikke det? Det blir jo veldig mange figurer å tegne da

Elevene studerer oppgaveteksten og de tidligere figurene

13 Marthe: 4 er jo halvparten

14 Erik: Ååå!

15 Marthe: Så hvis vi tar det dobbelte

*16 Erik: *teller hvor mange sirkler det er i figurnummer 4* 13!*

17 Marthe: 26

18 Camilla: 13 ganger 2 er 26

Camilla tegner figurnummer 8

19 Lærer: Hvor mange sirkler er det i figur 8?

20 Camilla: 26

21 Lærer: Er du sikker?

*22 Erik: *teller hvor mange sirkler det er i figurnummer 8* 25!*

*23 Camilla: 26 *peker på sirkelen i midten**

24 Erik: Jeg telte med den

*25 Camilla: *teller hvor mange sirkler det er i figurnummer 8* 25 *legger på en sirkel til i figuren**

26 Lærer: Dere hadde tegnet figuren riktig. Hvor mange telte dere?

27 Camilla: 25

Lærer nikker bekreftende

Ådne vil fortsette å bruke tellestrategien slik de gjorde i forrige oppgave og tegne et bilde av figurene der de kan telle de ønskede egenskapene ut fra disse. Camilla sier tydelig i fra at de ikke skal tegne alle figurene frem til figurnummer 8. Lærerens innspill (10) og (12) gjør at elevene studerer figurmønsteret og oppgaveteksten på nytt for å se etter andre muligheter. Marthe kommer med et forslag (13) om at 4 er halvparten av 8 og at de derfor kan doble figurnummer 4 for å komme frem til svaret. Denne tankegangen leder elevene inn på en hel-objekt strategi, der de bruker prinsippet om proporsjonalitet og tar utgangspunkt i en allerede kjent verdi. Her tar de utgangspunkt i figurnummer 4, som de vet består av 13 sirkler. Elevene tar så i bruk multiplikasjon for å regne seg frem til hvor mange elementer det er i figurnummer 8. Hel-objekt strategien kan ofte føre til over- eller undertelling, og i dette tilfellet har det ført til overtelling. De tok ikke hensyn til sirkelen i midten når de multipliserte figurnummeret og fikk dermed til svar at figurnummer 8 består av 26 sirkler, som ikke er det riktige svaret. Selv om de har regnet ut et svar, velger Camilla å tegne en modell av figur 8 på tavlen. Erik (22) og Camilla (25) teller antall sirkler i figur 8, og kommer frem til at det den består av 25 sirkler. De har her brukt tellestrategien til å kontrollere svaret sitt. Det kan virke som om de tror at de har tegnet figur 8 feil, fordi de velger å legge til en ekstra sirkel. Dette viser at selv om de benytter tellestrategien til å kontrollere svaret, velger de å stole på utregningen de gjorde med hel-objekt strategien. De endrer etter hvert svaret sitt fordi læreren (26) påpeker at de hadde tegnet figuren riktig og de ender derfor opp med riktig svar. Elevene viser likevel ikke forståelse for hvorfor metoden førte til overtelling, da de går videre til neste oppgave i stedet. I denne dialogen er det funnet bruk av tellestrategien og hel-objekt strategi.

Dialog 3

Da elevene på gruppe 3 skulle finne ut hvor mange sirkler figurnummer 25 bestod av begynte de med tellestrategien, men gikk etter hvert over til å bruke kontekstuell strategi:

Ådne tegner 26 sirkler på en horisontal rad
*29 Camilla: Så tegner du 25 til bortover der *peker på den horisontale raden**
30 Lærer: Trenger man egentlig å tegne 25 sirkler da? For oppgaven er å finne ut hvor mange sirkler det er, og ikke at man skal tegne figuren
31 Camilla: 25 ganger 3 ... det er 75. Pluss 1 på grunn av den i midten, så 76 da
32 Lærer: Hvordan vet dere at det er 25 ganget med 3 da?

33 Camilla: Fordi jeg merket sånn at 1 hadde en på sidene også er det en i midten, så da blir det en mer på alle sidene.
34 Lærer: Ja, kanskje du kan tegne det på tavlen, så de andre kan se hvordan du har tenkt?
**Camilla tegner figurnummer 1, og skriver på et 1-tall og setter en strek til de ytterste sirklene og skriver* $1 \times 3 = 3 + 1 = 4$*
Ådne skriver under «å gange et tall med 3+1
35 Lærer: Gjelder dette for figurnummer 100 også? Hvordan skal jeg gjøre det da?
36 Camilla: Da tar du 100 ganger 3, og 1
37 Lærer: Hva med figur 50 da?
38 Camilla: Da tar du 50 ganger 3, som er ... 150. og så tar du pluss en fordi det er en i midten
39 Lærer: Okei, er det alltid sånn uansett hvilken figur jeg har?
40 Camilla: Ja!

Elevene starter med å tegne sirkler for å lage figur 25, og ville antagelig funnet figurtallet ved telling, da dette er fremgangsmåten de har brukt i de forrige deloppgavene. Lærerens spørsmål (30) om det er nødvendig å tegne figuren får elevene til å skifte fokus. Elevene har bemerket seg et mønster i figurmønsteret og uttrykker (31) at man kan multiplisere 25 med 3 og legge til en, for å komme frem til svaret i oppgaven. Camilla påpeker hvorfor hun adderer med 1 i utsagnet sitt (31), men sier ikke noe om hvorfor hun multipliserer 25 med 3. Når læreren (32) spør hvorfor 25 blir multiplisert med 3, forklarer Camilla (33) at figur 1 økte med 3 sirkler ut fra den midterste sirkelen og det er grunnen til at hun gjør det i figur 25. Det kommer ikke eksplisitt frem, men det kan tolkes som om Camilla har oppdaget den generelle sammenhengen der figurnummeret må multipliseres med 3. Læreren foreslår at elevene skal tegne den sammenhengen de har oppdaget på tavlen (34). Dette fører til at de først tegner opp eksempelet med figur 1, men under eksempelet uttrykker Ådne en generell regel mer presist. Læreren spør om regelen de har skrevet på tavlen gjelder for konkrete figurer (35 og 37), og spør deretter om regelen gjelder for alle figurer (39). Spørsmålet til læreren gjør at Camilla (40) uttrykker eksplisitt at hun er klar over at dette er en generell sammenheng som gjelder for alle figurer i mønsteret.

Selv om kontekstuell strategi innebærer at elevene lager en formel, vil vi likevel si at elevene benyttet kontekstuell strategi da de løste denne oppgaven. De har ikke laget en algebraisk formel, men de har kommet frem til en regel som fungerer for en hvilken som helst figur. Elevene er kun avhengig av å vite figurnummeret til figuren de skal regne ut.

Elevene er på et faktuelt generaliseringsnivå i starten av denne dialogen. Camilla (31) forklarer hvordan man finner figurnummer 25, og begrunner fremgangsmåten med at figur 1 bestod av 1 sirkel i midten og en sirkel på hver av de 3 utstikkerne. Når Ådne skriver «å gange et tall med 3 + 1» på tavlen beveger de seg over til et kontekstuelt generaliseringsnivå, fordi han navngir den ubestemte kvantiteten ut fra konteksten. De beveger seg ikke videre til å bruke alfanumerisk notasjon, og vil derfor ikke nå opp på et symbolsk generaliseringsnivå.

I dialogen kommer det frem at elevene bruker en ubestemt kvantitet, fordi Ådne skriver «å gange et tall med 3 + 1». I dette tilfellet blir «et tall» en variabel som vil være avhengig av hvilket figurtall de skal finne. Det første kravet til Radford (2018) er derfor oppfylt. Elevene viser også at de kan operere med den ubestemte kvantiteten som om den var kjent, ved at de multipliserer det med 3 og legger til 1. I dialogen kommer det til uttrykk i Camilla sine utsagn 36 og 38. Det andre og tredje kravet er derfor også oppfylt. Elevene har på bakgrunn av dette vist høy grad av algebraisk tenkning ved bruk av kontekstuell strategi.

5.4 Oversikt over elevenes strategibruk

I tabellen har vi laget en oversikt over hvilke strategier elevene har brukt i begge oppgavene, og hvor ofte hver strategi ble tatt i bruk.

Resultatene våre viser at det er høyest forekomst av kontekstuell strategi blant våre informanter. Tellestrategien er også en strategi som blir hyppig brukt. Rekursiv strategi varierer i stor grad fra gruppene, da noen ikke har tatt den i bruk i det hele tatt, mens andre har brukt den flere ganger i samme oppgave. Hel-objekt strategien var den strategien det var lavest forekomst av, hvis vi ser bort fra prøve og feile strategien som ikke ble brukt i noen av oppgavene.

I datamaterialet vårt ble det funnet bruk av to strategier som ikke passet under noen av strategiene i vårt ordinære rammeverk. Rammeverket ble derfor utvidet, og de aktuelle strategiene har fått navnet «del-hel strategien» og «grupperingsstrategien». Del-hel strategien ble brukt i gruppe 1 sin dialog 3 og gruppe 3 sin dialog 3 på bordproblemet. Grupperingsstrategien ble brukt av gruppe 3 i dialog 2 på bordproblemet.

	Oppgave	Gruppe	Antall forekomster av hver strategi						
			Prøve og feile	Telle	Rekursiv	Hel-objekt	Kontekstuell	Del-hel	Gruppering
	Bord-problemet	1	0	4	1	0	3	1	
		2	0	2	0	1	3		
		3	0	1	2	0	2	1	1
	Det voksende mønsteret	1	0	1	2	1	3		
		2	0	1	2	0	2		
		3	0	2	0	1	3		
Antall			0	11	8	3	16	3	1

Tabell 3: Oversikt over elevenes strategibruk

5.4.1 Endring i elevenes strategibruk

Under har vi laget to tabeller som viser hvordan strategibruken til alle gruppene endret seg når de arbeidet med oppgavene på bordproblemet og det voksende mønsteret.

Det kommer tydelig frem at tellestrategien er den strategien de fleste av gruppene velger å starte med, og på siste oppgave har alle gruppene valgt å bruke kontekstuell strategi. Når elevene først tar i bruk kontekstuell strategi velger de fleste å holde seg til denne i resten av deloppgavene, noe som kan tyde på at elevene opplever denne strategien som hensiktsmessig å bruke. En annen ting man kan se i tabellene er at hel-objekt strategien og del-hel strategien aldri blir brukt alene til å svare på en deloppgave. Fra deloppgave b) til d) er det større variasjoner mellom gruppene på hvilke strategier de benytter i arbeid med bordproblemet. I arbeid med det voksende mønsteret er gruppene mer samstemte i hvilke strategier de bruker, da det kommer frem at de stort sett bruker de samme strategiene. På deloppgave b) på det voksende mønsteret er det større variasjoner i strategibruken mellom gruppene, enn det er på de andre deloppgavene.

Endring i strategibruk på bordproblemet			
Deloppgave	***Gruppe 1***	***Gruppe 2***	***Gruppe 3***
a)	Tellestrategi	Tellestrategi	Rekursiv strategi
b)	Tellestrategi	Tellestrategien	Rekursiv strategi
			Tellestrategien
c)	Kontekstuell strategi	Hel-objekt strategi	Grupperingsstrategien
	Tellestrategi	Kontekstuell strategi	
	Kontekstuell strategi		
d)	Del-hel strategi	Kontekstuell strategi	Del-hel strategi
	Tellestrategi		Kontekstuell strategi
	Rekursiv strategi		
e)	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi

Tabell 4: Strategibruk på bordproblemet

Endring i strategibruk på det voksende mønsteret			
Deloppgave	***Gruppe 1***	***Gruppe 2***	***Gruppe 3***
a)	Tellestrategi	Tellestrategi	Tellestrategi
b)	Rekursiv strategi	Rekursiv strategi	Hel-objekt strategi
	Hel-objekt strategi		Tellestrategien
	Rekursiv strategi		
c)	Kontekstuell strategi	Rekursiv strategi	Kontekstuell strategi
d)	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi
e)	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi	Kontekstuell strategi

Tabell 5: Strategibruk på det voksende mønsteret

5.5 Peking som en del av elevenes strategier

Under analysen av datamaterialet kom det frem at elevene aktivt brukte peking i begge oppgavene. Vi har derfor laget to tabeller som viser bruken av peking på både bordproblemet og det voksende mønsteret. I tabellene kommer det blant annet frem hvor mange ganger elevene har brukt peking når de arbeider med en bestemt strategi. Elevenes bruk av peking kan indikere på at det er en naturlig del av noen av strategiene, og dette vil vi gå nærmere inn på i kapittel 6.9.

Bordproblemet			
Strategi	**Antall ganger brukt**	**Antall pek**	**Gjennomsnitt**
Telle	7	14	2,0
Rekursiv	3	4	1,3
Kontekstuell	8	20	2,5
Hel-objekt	1	5	5,0
Del-hel	2	2	1,0
Gruppering	1	2	2,0
Sum	22	47	

Tabell 6: Bruk av peking på bordproblemet

Det voksende mønsteret			
Strategi	**Antall ganger brukt**	**Antall pek**	**Gjennomsnitt**
Telle	4	17	4,3
Rekursiv	4	17	4,3
Kontekstuell	8	11	1,4
Hel-objekt	2	13	6,5
Del-hel	0	0	0,0
Gruppering	0	0	0,0
Sum	18	58	

Tabell 7: Bruk av peking på det voksende mønsteret

6. Drøfting

I dette kapittelet blir dataene som ble presentert i kapittel 5 (analyse og resultatdel) drøftet i lys av teorien som ble presentert i kapittel 3. Drøftingen vil danne grunnlag for å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene i kapittel 7, konklusjon. Denne avhandlingens problemstilling handler om hvordan elever arbeider med figurmønsteroppgaver og hva elevenes strategivalg sier om deres algebraiske tenkning. For å svare på denne problemstillingen utformet vi tre forskningsspørsmål:

- *Hvilke strategier bruker elever på 4. trinn når de arbeider med figurmønsteroppgaver?*
- *Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?*
- *Hvordan utvikles elevenes strategier?*

For å strukturere drøftingskapitlet har vi tatt utgangspunkt i problemstillingen og forskningsspørsmålene, noe som gjenspeiles i underkapitlene. Sentralt gjennom hele kapitelet er at funnene fra undersøkelsen og analysen ses i lys av teori og tidligere forskning for å finne mulige forklaringer på våre funn.

6.1 Oppsumering av funnene

I kapittel 5 presenterte vi utvalgte dialoger fra vårt datamateriale. Vi brukte fem generaliseringsstrategier som analyseredskap: prøve og feile strategien, tellestrategien, hel-objekt strategi, rekursiv strategi og kontekstuell strategi. Av de fem strategiene fant vi alle uten om én i vårt datamateriale. Denne strategien var prøve og feile strategien. Det ble også funnet bruk av to strategier, som ikke passet under beskrivelsen av strategiene i det opprinnelige rammeverket. Disse var del-hel strategien og grupperingsstrategien. Alle strategiene som ble funnet i datamaterialet, ble derimot ikke brukt under arbeidet med begge oppgavene.

Bordproblemet

I oppgaven om bordproblemet fant vi bruk av fire av fem strategier fra det opprinnelige rammeverket, som var tellestrategien, rekursiv strategi, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. I tillegg ble det funnet bruk av de to nye strategiene, del-hel strategien og grupperingsstrategien. Oppgaven om bordproblemet er presentert i kapittel 5.2.

To grupper startet oppgaven med å benytte tellestrategien, og fant fort ut hvor mange personer som kan sitte rundt 4 bord. Gruppe 1 og gruppe 2 startet oppgaven på denne måten. Begge disse gruppene fortsatte å bruke tellestrategien for å finne ut hvor mange personer som kan sitte rundt 6 bord. Ingen av disse to gruppene brukte tellestrategien videre i arbeidet med denne oppgaven, da rekken av bord ble for lang til å tegne opp.

Gruppe 3 brukte rekursiv strategi i stor grad for å avdekke mønsteret i figurene. Denne gruppen benyttet denne strategien i starten av oppgaven for å finne svaret på hvor mange det er plass til rundt 4 og 6 bord. Gruppe 1 var også innom rekursiv strategi senere i arbeidet, da de skulle finne ut hvor mange bord de trengte hvis 30 personer kom på klassefesten. De var nødt til å avdekke hvordan mønsteret forandret seg fra figur til figur, og kom frem til at de trengte 14 bord ved hjelp av denne strategien. Gruppe 2 benyttet seg ikke av rekursiv strategi i arbeid med bordoppgaven.

Hel-objekt strategien ble benyttet av en av gruppene i løpet av arbeidet med denne oppgaven. Denne strategien ble brukt når rekken av bord begynte å bli for lang. Gruppe 2, som brukte denne strategien, tenkte ikke over at de måtte justere tallene de brukte for å unngå over- eller undertelling. I denne oppgaven førte hel-objekt strategien til at elevene fikk feil svar.

Kontekstuell strategi ble også brukt av alle gruppene da de skulle lage en regel som fungerte for et hvilket som helst antall bord. Ingen av gruppene brukte denne strategien før de hadde brukt flere av de andre strategiene. Elevene har mest sannsynlig innhentet mye informasjon om figurmønsteret når de har brukt flere strategier, og har brukt denne informasjonen til å lage en regel.

Gruppe 1 og gruppe 3 brukte del-hel strategien på samme oppgave i bordproblemet, og denne strategien ble kun brukt en gang. Gruppe 3 var den eneste gruppen som tok i bruk strategien vi har valgt å kalle for grupperingsstrategien.

Det voksende mønsteret

Oppgaven om det voksende mønsteret er presentert i kapittel 5.3. I denne oppgaven ble det funnet bruk av fire strategier. Disse var tellestrategien, rekursiv strategi, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi.

Tellestrategien ble brukt av alle de tre gruppene i starten av denne oppgaven. Det kan virke som om mønsteret i denne oppgaven ikke var like enkel å oppdage, ettersom alle gruppene gikk for denne strategien. Etter at gruppene oppdaget økningen til figurene ble ikke tellestrategien lenger brukt, med unntak av gruppe 3 som brukte tellestrategien for å kontrollere svaret sitt i deloppgave b).

Gruppe 1 og gruppe 3 benyttet hel-objekt strategien da de skulle finne ut hvor mage sirkler figurnummer 8 bestod av. Elevene på begge gruppene tar utgangspunkt i figurnummer 4, som de allerede har regnet ut, og bruker denne informasjonen til å konstruere figurnummer 8. De antar at dersom figurnummer 4 består av 13 sirkler vil figurnummer 8 bestå av det dobbelte, altså 26. Her har ikke elevene tatt hensyn til over- eller undertelling og får dermed feil svar. Gruppe 1 kom til slutt, ved hjelp av læreren, frem til at det ikke fungerte å doble figurnummeret uten videre og justerte slik at de fikk riktig svar. Gruppe 3 ble også gjort oppmerksom på at de hadde tegnet figur 8 riktig, selv om de mente at det skulle være en sirkel mer på grunn av doblingen. Gruppe 2 benyttet ikke denne strategien i arbeid med oppgaven om det voksende mønsteret.

Rekursiv strategi ble benyttet av gruppe 1 og 2. Denne strategien ble brukt for å regne seg frem til en figur, når de allerede visste hvordan figuren før så ut. Elevene kom ikke frem til en formel ved hjelp av denne strategien.

Alle gruppene brukte kontekstuell strategi da de skulle lage en regel som fungerte for en hvilken som helst figur. I likhet med oppgaven om bordproblemet, brukte alle gruppene andre strategier før de gikk over til kontekstuell strategi.

6.2 Erfaringer med oppgavene

Vi oppga ingen informasjon om tallmønsteret, som vil si hvor mange elementer hver figur bestod av, under presentasjonen av oppgavene. Dette unngikk vi for å gjøre oppgavene mer åpne, med tanke på elevenes strategivalg. Elevene måtte derfor selv registrere informasjon om tall tilknyttet oppgavene. I Lannin (2005) sin studie valgte han å oppgi den rekursive sammenhengen i oppgaveteksten, noe som førte til at elevene startet med rekursiv strategi i disse oppgavene. Vi valgte å ikke oppgi den rekursive sammenhengen i våre oppgavetekster, fordi vi ønsket at elevene skulle oppdage disse selv. Ettersom at Lannin viser til at å oppgi denne sammenhengen fører til bruk av rekursiv strategi, kan det være en mulig forklaring på hvorfor de fleste gruppene startet med å bruke tellestrategien.

Når elevene benyttet tellestrategien på det voksende mønsteret oppdaget alle gruppene en generell sammenheng med hvor mange elementer figurene økte med fra en figur til den neste. I bordproblemet derimot var det bare en av gruppene som oppdaget en generell sammenheng, der denne gikk ut på strukturen i mønsteret. En mulig grunn til at det ble oppdaget flere generelle sammenhenger ved bruk av tellestrategien i det voksende mønsteret, kan være at elevene arbeidet med denne oppgaven til slutt. Det er sannsynlig at elevene hadde mer trening i å se etter generelle sammenhenger når de løste denne oppgaven, fordi de hadde arbeidet på en tilsvarende måte med bordproblemet to dager tidligere.

En annen grunn til at det ble uttrykt flere generelle sammenhenger ved bruk av tellestrategien i det voksende mønsteret enn bordproblemet, kan være utformingen av figurmønstrene. I bordproblemet tegnet de opp like mange bord som figurnummeret tilsa, og fylte deretter inn antall personer etter vilkårene de hadde fått oppgitt for å plassere personer. Dette vil i utgangspunktet gjøre det lettere for elevene å tegne figuren, men også å oppdage en sammenheng mellom figurtall og figurnummer da begge er representert i mønsteret. Det er mulig at fordi det var enkelt å tegne en figur eller modell, så ikke elevene som brukte denne strategien behovet for å finne ut hvor mange det økte med fra figur til figur. I det voksende mønsteret blir det mer nødvendig å finne ut hvor mange sirkler figurene øker med for å kunne tegne neste, noe gruppene her løste ved telling.

6.3 Generaliseringsstrategier

I dette drøftingskapittelet vil vi besvare forskningsspørsmålet: «Hvilke strategier bruker elever på 4. trinn når de arbeider med figurmønsteroppgaver?». Under drøftingen av elevenes generaliseringsprosess er det nødvendig å bemerke at det ikke alltid var enkelt å kategorisere strategiene elevene benyttet. En utfordring med å kategorisere strategiene er at noen av dem inneholder samme komponenter. Tellestrategien der elevene tegner en figur eller modell og teller elementene i denne, kan også komme til uttrykk i andre strategier. Blant annet i rekursiv strategi er det sannsynlig å tenke at elevene har brukt telling for å registrere en økning fra figur til figur, men strategien kategoriseres som rekursiv, fordi tankegangen går ut på å regne seg frem fra figuren før. Kontekstuell strategi innebærer også telling for å få informasjon av oppgaven, slik at de kan lage en generell regel eller formel.

Kontekstuell strategi og prøve og feile strategien kan også være vanskelig å skille. I begge strategityper bruker man gjerne tall eller informasjon fra oppgaveteksten og forsøker å lage en regel eller formel. Forskjellen ligger i om elevene begrunner tallene de velger og formelen eller regelen de kommer frem til. I en slik begrunnelse viser elevene forståelse for de valgene de gjør under løsningen av oppgaven. Dette kan likevel være vanskelig for en lærer å klart kategorisere, da det kan foreligge begrunnelser elevene ikke uttrykker, eller at elevene har oppdaget en regel eller formel tilfeldig ved prøving og feiling og deretter ser en sammenheng. Hel-objekt strategien er lettere å skille fra de andre strategiene i rammeverket fordi den ofte involverer multiplikasjon eller divisjon.

6.3.1 Variasjon i elevenes strategibruk

I datamaterialet vårt fant vi at elevene ofte vekslet mellom hvilke strategier de brukte, og vi erfarte at det i noen tilfeller var uenighet innad i en gruppe om hvilken strategi de ønsket å benytte. Elevene brukte gjerne en strategi til å skaffe seg en oversikt, og tok med seg det de fant ut til en annen strategi for å komme videre i oppgaveløsningen. Stacey (1989) fant også i sin studie at det var vanlig for elever å begynne med en strategi og gå videre til en annen for å komme seg videre i oppgaven. I hennes studie fant hun at 64% brukte mer enn én strategi når de løste en oppgave. Dette ser vi også i denne studien der alle gruppene benyttet seg av flere strategier innenfor en og samme oppgave.

Et eksempel på at elevene brukte informasjon de har innhentet ved hjelp av en strategi, for så å gå over til en annen, kan vi se når gruppe 3 jobbet med oppgaven om det voksende mønsteret. De startet med å telle antall elementer i de tre figurene de har fått presentert for å finne ut hvor mange sirkler de trengte for å lage figur 4. De oppdaget at det ble en sirkel mer per utstikker for hver gang, altså 3 sirkler mer for hver figur og tegnet dermed figur nummer 4. Elevene har altså brukt tellestrategien for å finne figurtallet til figur 4.

Da gruppe 3 videre skulle finne figurtallet til figur 8 ville en av elevene fortsette å bruke tellestrategien ved å tegne opp de resterende figurnumrene. I stedet for å fortsette med tellestrategien oppdaget de andre på gruppen at 8 er delelig med 4, og valgte å doble figurtallet til figurnummer 4 for å finne figurtallet til figurnummer 8. De benyttet altså det de hadde lært under arbeidet med tellestrategien. Etter hvert når de skulle lage en generell regel for en hvilken som helst figur, benyttet de informasjonen de hadde fått fra tellestrategien og hel-objekt strategien når de gikk over til kontekstuell strategi. En utdypende oversikt over gruppens diskusjoner underveis i denne oppgaven kan leses i analysekapittelet.

Lannin et al. (2006) fant i deres studie at en av grunnene til at det oppstår et strategibytte er et ønske om effektivitet. I vår studie ser vi også lignende tendenser, eksempelvis i gruppe 1 sin dialog 2 og 3 på det voksende mønsteret. Elevene bruker først tellestrategien og har tenkt til å fortsette med det, helt til et av gruppemedlemmene kommenterer at de kan doble figurnummeret noe som gjør at de bytter til hel-objekt strategien. I gruppe 3 sin dialog 2 på samme oppgave fører også en diskusjon rundt tellestrategiens effektivitet til at elevene endrer strategi.

Under arbeidet med bordproblemet brukte gruppe 1 og gruppe 3 fire forskjellige strategier. Gruppe 2 brukte tre forskjellige strategier. I arbeidet med det voksende mønsteret brukte gruppe 1 også fire forskjellige strategier, og gruppe 2 og 3 brukte tre forskjellige strategier.

6.3.2 Fravær av prøve og feile strategien

Selv om elevene varierte i stor grad på hvilke strategier de brukte i oppgavene, var det ingen av gruppene som benyttet seg av prøve og feile strategien. Denne strategien går ut på at man gjetter en regel uten å tenke over hvorfor denne regelen kan fungere. Det er vanlig at elever som benytter seg av denne strategien eksperimenterer med ulike operasjoner og tall fra oppgavens kontekst, for å få disse til å passe med mønsteret (Lannin, 2005).

Vi har ikke kategorisert noen av dialogene fra vårt datamateriale innenfor denne kategorien. Enkelte av elevene har likevel gjettet og forsøkt med tilsynelatende tilfeldige tall, noe som kunne tydet på prøve og feile strategien. Det som gjør at denne gjettingen ikke har blitt plassert innenfor denne strategien er stort sett fordi de ikke har gjettet på regler for å så forsøke med tall fra konteksten, eller forsøkt å få disse tallene til å passe med mønsteret. Dette kan komme av at elevene ikke har mye erfaring med å lage formler eller regler, og at det derfor ikke faller dem naturlig å gjette på en formel eller regel før de blir bedt om å lage en. En av grunnene kan være at elevene vi forsker på går på 4. trinn, og ikke har brukt læreplanen LK20 gjennom alle sine skoleår, i tillegg til at det tar tid å endre grunnleggende idéer i skolene. LK20 har blant annet lagt større vekt på algebraisk tenkning på barnetrinnet enn tidligere læreplaner (se Utdanningsdirektoratet, 2013; Utdanningsdirektoratet, 2020), noe som kan tyde på at elevene ikke har arbeidet mye med dette tidligere.

Det er i hovedsak funnet gjetting i bordproblemet der elevene skulle finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 30 personer. Dette kan skyldes at de i de tidligere oppgavene kun hadde forsøkt å finne ut figurtallet til et figurnummer, men i denne oppgaven måtte de snu om på det og finne figurnummeret ut fra figurtallet. I tillegg hadde ikke noen av gruppene kommet frem til en formel eller regel på dette tidspunktet, så de hadde ikke mulighet til å ta utgangspunkt i en formel de kunne snu om på.

6.4 Utvidelse av rammeverket

Under arbeidet med analysen av datamaterialet ble det funnet bruk av to strategier som ikke passet inn under vårt opprinnelige rammeverk for generaliseringsstrategier. Vi valgte derfor å utvide rammeverket, ettersom vi var åpne for at elevene kunne ta i bruk andre strategier som ikke blir nevnt i rammeverket. Disse to strategiene er presentert i gruppe 1 sin dialog 3 og gruppe 3 sin dialog 2 og 3, i arbeidet med bordproblemet. I utvidelsen av rammeverket har strategiene fått navnene del-hel strategien og grupperingsstrategien. Del-hel strategien kan minne om hel-objekt strategien, men elevene har ikke brukt multiplikasjon eller divisjon, som er et krav for hel-objekt strategien. Denne strategien er presentert i gruppe 1 sin dialog 3 og gruppe 3 sin dialog 3. Grupperingsstrategien er presentert i gruppe 3 sin dialog 2.

6.4.1 Del-hel strategien

Både gruppe 1 og gruppe 3 tok i bruk del-hel strategien. Denne strategien har likheter med hel-objekt strategien ved at den tar utgangspunkt i et allerede kjent figurtall, og bruker dette til å regne seg frem til ønsket figurnummer. I tillegg fører også denne strategien ofte til over- eller undertelling. Stacey (1989) fant i sin studie at mange elever brukte en variant av hel-objekt strategien der de adderte to figurtall for å finne figurtallet til det figurnummeret de ønsket. Stacey sin variant av hel-objekt strategien er lik del-hel strategien på den måten ved at elevene bruker figurtallet til tidligere figurer for å finne figurtallet til en figur lenger ut i rekken (Stacey, 1989, s. 152). Elevene i Stacey sin undersøkelse brukte også addisjon i stedet for multiplikasjon, men elevene i denne studien har brukt subtraksjon.

Begge gruppene brukte del-hel strategien på samme oppgave, der de skulle finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 30 personer. De løste også oppgaven på tilnærmet lik måte, der de tok utgangspunkt i figur 20 som tilsvarer 42 personer. Deretter oppdaget begge gruppene at det er plass til 12 personer på figur 5, og mente at de kunne ta figur 20 og subtrahere med figur 5, for å finne antall bord man trenger til 30 personer. I likhet med hel-objekt strategien førte elevenes bruk av denne strategien til overtelling. Grunnen til at denne strategien ikke kan kategoriseres som hel-objekt strategien er at den ikke baserer seg på proporsjonalitet, i tillegg til at det ikke blir brukt multiplikasjon eller divisjon.

6.4.2 Grupperingsstrategien

Lannin et al. beskriver chunking strategien slik: «the student builds on a recursive pattern by building a unit onto known values of the desired attribute» (Lannin et al., 2006, s. 6).

Grupperingsstrategien kan sees på som en sammensetning av tankegangen som ligger til grunn for rekursiv og hel-objekt strategien. Grunnen til dette er at de benytter et kjent figurtall for å regne seg frem til det ønskede figurtallet ved multiplikasjon, der det som multipliseres er basert på hva figuren øker med fra figur til figur. En mulig forklaring på hvorfor gruppe 3 tok i bruk denne strategien kan være at de har brukt rekursiv strategi på de to forrige deloppgavene, og dermed fremdeles tar utgangspunkt i denne tankegangen om hvor mange elementer figurmønsteret øker med fra figur til figur. Dette fremkom også i Lannin et al (2006) sin studie der et av funnene var at det var mer sannsynlig at elever brukte chunking strategien dersom de hadde brukt rekursiv strategi tidligere. Det er sannsynlig at ønsket om effektivitet har gjort at de velger å ta utgangspunkt i en konkret figur de kjenner figurtallet til, for så å regne seg direkte frem til ønsket figurnummer. På denne måten unngår de å regne ut figurtallet til hver figur, slik de gjorde i rekursiv strategi.

6.5 Strategier elevene benyttet

I det følgende vil vi drøfte elevenes bruk av strategiene vi har brukt som rammeverk (kapittel 5.1). Dette vil bli brukt som utgangspunkt for å besvare forskningsspørsmålet: «Hvilke strategier bruker elever på 4. trinn når de arbeider med figurmønsteroppgaver?»

Noe som skilte seg ut under analysen av datamaterialet var at de ikke-eksplisitte strategiene i stor grad ble brukt for å få en oversikt over figurmønsteret, og de eksplisitte strategiene ble brukt for å oppdage det generelle i det spesielle.

6.5.1 Tellestrategien

Tellestrategien går ut på at elevene ser på et bilde eller lager en modell som representerer en gitt situasjon, for så å telle elementene i modellen (Lannin, 2005). I vår analyse kom det frem at alle de tre gruppene brukte tellestrategien, men at de gjerne byttet til en annen strategi når det ble for mange elementer å telle. Ifølge Lannin (2005) går tellestrategien også ut på å bruke den informasjonen elevene har tilegnet seg til å konstruere en regel eller formel. Våre resultater viser at elevene ikke bruker tellestrategien til å lage en generell regel, men de bruker informasjon de har tilegnet seg ved hjelp av tellestrategien til å lage generelle regler når de går videre til andre strategier.

I oppgaven om det voksende mønsteret brukte alle de tre gruppene tellestrategien på den første deloppgaven. Alle gruppene oppdaget en generell sammenheng med hvor mange elementer figurene økte med fra en til en annen, ved hjelp av telling. De viste likevel at de var avhengig av å tegne figuren de skulle finne figurtallet til og telle antall elementer for å være sikker på svaret sitt. Ingen av gruppene gikk aktivt inn for å finne en generell regel. Dette kan tyde på at elevene ikke klarte å innhente seg nok informasjon om figurmønsteret kun gjennom telling.

I resultatene våre kommer det frem at tellestrategien var den vanligste strategien å bruke i starten av en oppgave med figurmønster. I Stacey (1989) sin forskningsartikkel var det også vanlig at elevene brukte en tellestrategi når de skulle finne relativt lave figurnummer, og at de gjerne tok i bruk andre strategier når de skulle finne figurer mye lenger ut i rekken av mønsteret (se Stacey, 1989, s. 159). Tellingen førte til at elevene fikk noe informasjon om hvordan mønsteret utviklet seg, og hadde dermed noe å jobbe videre med. Gruppe 1 på bordproblemet og gruppe 3 i det voksende mønsteret går tilbake til å bruke tellestrategien for å kontrollere svarene sine. Sett bort fra dette gikk ingen av gruppene tilbake til tellestrategien etter de hadde gått videre til en annen strategi. Selv om det ikke har blitt uttrykt mye generalitet ved bruk av tellestrategien, ser vi at når så mange elever benytter denne i startfasen kan det kanskje være nødvendig for mange av dem å bruke tellestrategien. De kan bruke denne strategien til å få informasjon om spesifikke deler av mønsteret, som de senere kan bruke til å oppdage mer generelle sammenhenger.

6.5.2 Rekursiv strategi

Rekursiv strategi går ut på at man beskriver sammenhengen mellom en figur og den påfølgende i rekken, og bruker gjerne gjentatt addisjon til å regne seg frem til figurtallet for ønsket figurnummer. Når man lager formler eller regler ved rekursiv strategi er man avhengig av å kjenne til antall elementer i figuren før (Lannin, 2005).

I likhet med tellestrategien viser datamaterialet at også denne strategien ble mye brukt i startfasen av begge oppgavene. En grunn til at flere av elevene kan ha valgt å bruke denne strategien tidlig i prosessen, er at de fikk en oversikt over hvor mange elementer figurmønsteret økte med. Vi ser også at elevene har en tendens til å bruke rekursiv strategi når figurnummeret de skal finne figurtallet til er relativt nærme et figurnummer de allerede har funnet, noe Lannin et al. (2006) også fant i sin studie. I de første deloppgavene, der figurnumrene er nærme hverandre, brukte elevene rekursiv strategi. I tillegg kan man se dette i gruppe 1 sin dialog 3 på bordproblemet der de først har regnet seg frem til at de trenger 15 bord for å få plass til 30 personer, og innser at figurnummeret er akkurat litt for høyt. Fordi justeringen som er nødvendig er liten, bruker de rekursiv strategi til å subtrahere seg frem til riktig figurnummer. Etter hvert som figurnummeret økte gikk de fleste gruppene bort fra denne strategien, og enkelte av elevene påpekte at det var tungvint og tok lang tid å løse oppgaven på denne måten. Dette stemmer overens med det Lannin et al. (2006) fant i sin studie, der elevene endrer strategivalg for å løse oppgavene på en mer effektiv måte.

6.5.3 Hel-objekt strategi

Hel-objekt strategien vil si at man bruker prinsippet om proporsjonalitet, og tar utgangspunkt i en allerede kjent del av figurmønsteret for å konstruere en større eller mindre figur ved bruk av multiplikasjon eller divisjon (Lannin, 2005).

I vår analyse kom det frem at alle gruppene benyttet seg på et tidspunkt av hel-objekt strategien i løpet av arbeidet med oppgavene. Det som er interessant er at ingen av gruppene brukte denne strategien alene på en oppgave, men begynte gjerne med å bruke den før de gikk over til en annen strategi. En grunn til dette kan være at bruken av hel-objekt strategien førte til at alle gruppene fikk feil svar, på grunn av overtelling. Etter at elevene ble gjort oppmerksom på dette, gikk samtlige grupper over til en ny strategi for å løse oppgaven.

Det kan virke som om hel-objekt strategien krever at elevene har en god forståelse for hva oppgaven går ut på, samtidig som de må ha en god matematisk forståelse. Det må de ha for å unngå å gjøre feil, på grunn av at man ikke kan multiplisere og dividere uten å gjøre justeringer dersom figurmønsteret ikke er proporsjonalt. Elevenes bruk av denne strategien kan indikere på at de ikke forholdt seg til strukturen i mønsteret, men isteden fokuserte på relasjonen mellom tallverdiene. Lannin et al. (2006) fant i sin studie at elever som ikke har et klart visuelt bilde av problemsituasjonen ofte bruker hel-objekt strategien, noe som kan forklare hvorfor elevene i denne studien i liten grad fokuserte på strukturen i mønsteret. Det manglende fokuset på strukturen i mønsteret kan være årsaken til at alle gruppene fikk feil svar ved å bruke denne strategien. Dette stemmer også overens med Bishop (2000) sin studie, der hun fant at de fleste elevene som benyttet hel-objekt strategien ikke gjorde nødvendige justeringer, og dermed fikk feil svar.

6.5.4 Kontekstuell strategi

Kontekstuell strategi handler om at man lager en regel eller formel ut fra den informasjonen man kan hente fra oppgavekonteksten, og at formelen eller regelen blir relatert til en telleteknikk (Lannin, 2005).

I vårt datamateriale kom det frem at alle elevene etter hvert benyttet kontekstuell strategi, både i bordproblemet og i det voksende mønsteret. Elevene gikk stort sett over til å benytte kontekstuell strategi når de skulle finne ut hvor mange personer som kunne sitte ved et hvilket som helst antall bord, eller for finne ut hvor mange blå sirkler de trengte til en hvilken som helst figur. At elevene velger å benytte denne strategien når de blir stilt et mer generaliserende spørsmål, kan tyde på at denne strategien egner seg godt til å nå et høyere generaliseringsnivå. Vi ser også at når elevene først har tatt i bruk kontekstuell strategi på en deloppgave går de ikke bort fra denne, med unntak av gruppe 1 på bordproblemet. Dette kan tyde på at elevene opplever strategien som effektiv og hensiktsmessig, da det stort sett er disse faktorene som har ført til endring i strategivalg på de andre oppgavene.

Radford (1996) sier at mange elever tror bruk av noen få talleksempler er tilstrekkelig for å illustrere en generalisering. Dette ser vi blant annet hos gruppe 1 og 2 når de benytter kontekstuell strategi i det voksende mønsteret. Når de skal finne en generell regel starter begge gruppene med konkrete tall. Etter gruppe 2 har presentert sine to eksempler, påpeker læreren at det er eksempler, og spør hvordan de kan skrive det som en regel. Dette gir en indikasjon til elevene om at eksempler ikke er en generell regel, og viser viktigheten av lærernes rolle for at elevene skal lykkes i generaliseringsarbeidet (se Carraher & Schliemann 2018). Effekten når læreren stiller et slikt spørsmål er at elevene tar i bruk en ubestemt kvantitet (x).

6.6 Strategi og algebraisk tenkning

I denne delen av kapittelet vil vi forsøke å besvare forskningsspørsmålet: «Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?» ut fra våre funn som kom frem i analysen. I teorikapittelet har vi presentert flere ulike forskere som har ulike teorier om hva som inngår i algebraisk tenkning. Hovedforskjellen i synspunktene går ut på om alfanumerisk notasjon er nødvendig for å kategorisere noe som algebraisk tenkning. Vi velger å støtte oss på Radford (2014) og Zazkis & Liljedahl (2002) sin mening om at alfanumerisk notasjon ikke er nødvendig for å kunne si at noen har tenkt algebraisk. Vi vil også påpeke at alfanumerisk notasjon heller ikke nødvendigvis er nok til å kategorisere noe som algebraisk tenkning. Grunnen til at vi ikke ser alfanumerisk notasjon som avgjørende for algebraisk tenkning, er blant annet at elever kan generalisere og bruke ubestemte kvantiteter analytisk med andre ord og beskrivelser enn med alfanumerisk notasjon. Bruk av alfanumerisk notasjon vil gjerne gjøre det enklere å uttrykke algebraisk tenkning, og også muligens gjøre det enklere for en lærer å kategorisere noe som algebraisk tenkning. Likevel ser vi fra vårt datamateriale at alfanumerisk notasjon gjerne er noe elevene tar mer i bruk etter hvert som de har arbeidet mer med å generalisere og tenke algebraisk.

Strategiene elevene har benyttet under arbeidet med oppgavene vil drøftes opp mot Radford (2018) sine kjennetegn for algebraisk tenkning. I elevarbeid er det ikke nødvendigvis slik at alle kravene til algebraisk tenkning er oppfylt. Strategiene vil derfor drøftes til om de har høy eller lav grad av algebraisk tenkning. Som nevnt tidligere, benytter gjerne elevene informasjon de har tilegnet seg ved hjelp av en strategi når de går videre på en annen. Det er derfor vanskelig å si at en strategi nødvendigvis fører til høyere algebraisk tenkning enn en annen, fordi elevene bruker strategiene om hverandre. I tillegg vil graden av algebraisk tenkning innenfor en strategi være avhengig av hvem som bruker den, og noen elever eller grupper vil derfor kunne vise en høyere grad av algebraisk tenkning enn andre.

Tellestrategien

Elevenes bruk av tellestrategien førte de ikke så langt i generaliseringsprosessen, men den ga dem verdifull informasjon som de brukte videre i arbeid med oppgavene. Alle de tre gruppene brukte tellestrategien til å tegne en modell av situasjonen og telte de ønskede egenskapene ut fra denne, men ingen brukte denne strategien til å forsøke å lage en formel. Ingen av de tre kravene til Radford (2018) har blitt oppfylt ved bruk av tellestrategien. Vi kan derfor ikke si at elevene har behandlet informasjonen de har fått fra tellestrategien analytisk, og kan heller ikke si at prosessen innebærer en høy grad av algebraisk tenkning.

Rekursiv strategi

Rekursiv strategi var i likhet med tellestrategien en strategi som ble benyttet relativt tidlig i arbeidet med oppgavene. Når elevene arbeider med rekursiv strategi ligger fokuset på tidligere figurer i figurmønsteret, og det vil si at de må se på sammenhengen og legge merke til disse. Alle gruppene oppdaget hvor mange stoler og hvor mange sirkler det ble lagt til for hver figur i begge figurmønstrene. De har altså oppdaget at i bordproblemet øker antall stoler med 2 og i det voksende mønsteret øker antall sirkler med 3. Elevene oppdager også likheter når de ser at figurmønsteret alltid vokser på samme måte fra en figur til den neste. Når elevene legger merke til dette har de oppdaget et system som de kan repetere fra figur til figur, og finne antall stoler eller sirkler i figurmønsteret, så lenge de jobber seg videre fra en allerede kjent figur. Når elevene arbeidet med rekursiv strategi brukte de ikke en ukjent variabel eller alfanumerisk notasjon, men som nevnt tidligere påpeker Zazkis & Liljedahl (2002) at fraværet av alfanumerisk notasjon ikke kan bekrefte at det er fravær av algebraisk tenkning.

Algebraisk tenkning kan være mer eller mindre til stede når elever benytter rekursiv strategi. Strategien kan innebære mye algebraisk tenkning, men den kan også benyttes uten særlig stor grad av det. Det er naturlig å tenke at figurmønsteret og utformingen av det kan spille en rolle for hvor høy grad av algebraisk tenkning som er til stede for å kunne oppdage den rekursive sammenhengen. Dersom denne er relativt enkel å oppdage, slik at elevene kan telle seg videre til neste figur uten å benytte variabler, krever det mindre algebraisk tenkning.

Grupperingsstrategien

Grupperingsstrategien bygger på tankegangen som ligger til grunn for blant annet rekursiv strategi. Denne strategien ble brukt på bordproblemet, der den rekursive sammenhengen er enkel å oppdage. Elevene som brukte denne strategien brukte ikke variabler i utregningen sin, men de multipliserte differansen mellom figurnumrene med den rekursive sammenhengen. Elevene har i denne omgang ikke vist en høy grad av algebraisk tenkning ved bruk av grupperingsstrategien, men de har vist at de har forholdt seg analytisk til figurmønsteret på grunn av at de gjør justeringer underveis og ender opp med riktig svar. De er derfor et skritt nærmere til å tenke algebraisk.

Hel-objekt strategien

Alle gruppene brukte hel-objekt strategien kun en gang til sammen på begge oppgavene. Gruppe 2 brukte den på bordproblemet, og gruppe 1 og 3 brukte den på det voksende mønsteret. Samtlige gruppers bruk av hel-objekt strategien førte til overtelling, fordi de gikk ut fra at man bare kan doble figurtallet. I oppgaven om det voksende mønsteret hadde elevene tidligere funnet ut figurtallet til figurnummer 4, som er 13. De to gruppene som brukte hel-objekt strategien på deloppgave b), som var å finne ut figurtallet til figurnummer 8, valgte å doble 13, slik at de fikk 26. Elevene har mest sannsynlig ikke analysert figurmønsteret grundig nok, og ender derfor opp med feil svar. Ettersom elevene ikke har håndtert situasjonen analytisk og ikke tatt i bruk ubestemte kvantiteter, kan vi ut fra Radford sine krav trekke slutningen om at elevene har valgt en strategi som gjenspeiler liten grad av algebraisk tenkning.

Lannin (2005) påpeker at elever ofte gjør feil justeringer når de bruker hel-objekt strategien. Dette skjedde også i vår studie, men om de hadde gjort de nødvendige justeringene ville de ha behandlet situasjoner mer analytisk, og graden av algebraisk tenkning ville mest sannsynlig vært høyere.

Del-hel strategien

Del-hel strategien kan på mange måter ligne på hel-objekt strategien, selv om det blir brukt subtraksjon i stedet for multiplikasjon. Elevene har på samme måte som i hel-objekt strategien ikke analysert figurmønsteret godt nok, ettersom bruken av del-hel strategien også har ført til overtelling. Vi kan derfor heller ikke si at denne strategien viser en høy grad av algebraisk tenkning.

Kontekstuell strategi

Denne strategien ble brukt av alle gruppene for å lage en generell regel i bordproblemet og det voksende mønsteret. Når elevene brukte denne strategien viste de at de hadde en god forståelse for figurmønstrene, og brukte i flere tilfeller alfanumerisk notasjon for å uttrykke den ukjente variabelen. De viste også forståelse for at variabelen representerte antall bord/figurnummeret i bordproblemet og figurnummeret i det voksende mønsteret. I bordproblemet oppdaget de etter hvert at det var plass til like mange personer på hver langside, og at de måtte skrive den ukjente variabelen som «2x». I tillegg var de klar over at det alltid ble lagt til 2 stoler for hvert nye bord, og at dette hadde betydning på hvordan formelen ble, og skrev til slutt «2x+2».

For å komme frem til en formel ved bruk av kontekstuell strategi er alle de tre kravene til Radford (2018) for algebraisk tenkning stort sett oppfylt, og bruken av denne strategien viser en høyere grad av algebraisk tenkning, enn de andre strategiene.

6.7 Stegvise generaliseringsnivå?

Radford (2011) mener at ubestemthet og analytisitet kan ta flere former, fordi algebraisk tenkning kan forekomme i ulike nivå av generalitet (s. 311). Når man snakker om ulike nivåer eller lag av generalitet vil dette kunne implisere at man beveger seg stegvis fra et nivå til det neste, etter hvert som man finner mer sofistikerte måter å uttrykke generalitet. Radford (2010) presenterer som nevnt tidligere tre ulike generaliseringsnivå. Fra resultatene våre kan vi se at gruppene til sammen har vært innom alle generaliseringsnivåene, men det er ulikt hvor mange nivåer hver gruppe har vært innom. Da Radford (2018) gjennomførte en studie som fulgte elevers generaliseringsprosess fra klassetrinn til klassetrinn, fant han at elevene bevegde seg fra et faktuelt generaliseringsnivå på 4. trinn til et kontekstuelt generaliseringsnivå på 5. trinn, og først nådde et symbolsk generaliseringsnivå på 6. trinn. Ut fra hans funn kan man dermed si at det vil være sannsynlig at elevene beveger seg gradvis fra faktuelt generaliseringsnivå, til kontekstuelt- og videre til et symbolsk generaliseringsnivå. Majoriteten av våre informanter gikk gradvis langs generaliseringsnivåene på samme måte som Radford (2018) fant, dog over et vesentlig kortere tidsrom.

Et funn i denne studien er at gruppe 2, både på bordproblemet og i det voksende mønsteret, hoppet direkte fra et faktuelt generaliseringsnivå til symbolsk generaliseringsnivå. Dette er bemerkelsesverdig da man normalt vil forvente en jevn progresjon fra nivå til nivå. I bordproblemet kan man se i gruppe 2 sin dialog 3 at elevene blir introdusert for den ubestemte kvantiteten x av læreren i starten av dialogen. Deretter forklarer elevene hvordan man kan finne et hvilket som helst antall bord med konkrete eksempler, og befinner seg følgelig på et faktuelt generaliseringsnivå. Når læreren (150) så spør om hva man gjør hvis man har x bord, bruker elevene alfanumerisk notasjon til å lage en generell regel, som de også forklarer. De går derfor videre til symbolsk generaliseringsnivå, fordi de forstår at x kan representere et hvilket som helst figurnummer. Mulige forklaringer til hvorfor de ikke bruker naturlig språk til å forklare en generell regel (kontekstuelt nivå) kan være både at de har blitt introdusert for x, men også at det ofte er utfordrende for elever å sette ord på de generelle sammenhengene de oppdager med naturlig språk (se Radford, 2018).

At elevene hopper direkte fra faktuell generalisering til symbolsk generalisering ser man også i gruppe 2 sin dialog 3 på det voksende mønsteret. Her er det imidlertid ikke læreren som leder elevene mot å bruke den ubestemte kvantiteten x, men en av medlemmene på gruppen (Martine 78). Dette kan skyldes at de arbeidet med bordproblemet to dager tidligere og nå kobler det å skrive en regel med å uttrykke den med alfanumerisk notasjon. De forklarer også formelen de har laget og viser dermed forståelse for hva de ulike komponentene i formelen representerer. En mulig grunn til at elevene ikke går innom kontekstuelt generaliseringsnivå på det voksende mønsteret kan være at oppgaven ikke har en kontekst elevene kan kjenne igjen fra den virkelige verden, slik som bordproblemet har. Likevel når man ser at den samme gruppen hopper over kontekstuelt generaliseringsnivå på begge oppgavene, kan det tyde på at elevene ikke hadde behovet for å forklare en generalitet bare ved hjelp av naturlig språk. Det vil være mulig å anta at det er viktig for elevenes forståelse at de går innom alle nivåene. Likevel ser man at disse elevene viser forståelse for de ulike komponentene i mønsteret og klarer å lage en generell formel ved alfanumerisk notasjon, noe som kan tale for at det ikke nødvendigvis er kritisk å hoppe over et nivå.

Selv om de andre gruppene fulgte en mer jevn progresjon i sin generalisering, er det verdt å merke seg at det bare ved ett annet tilfelle ble nådd frem til symbolsk generaliseringsnivå (se gruppe 1 sin dialog 4 i det voksende mønsteret). Når gruppe 1 når et symbolsk nivå på det voksende mønsteret, og ikke bordproblemet, kan dette skyldes at de har arbeidet med å lage en generell regel i forrige økt og dermed har større forutsetninger for å nå et høyere generaliseringsnivå i den siste økten. Også gruppe 3 ender på et høyere generaliseringsnivå på det voksende mønsteret, enn de gjorde i bordproblemet. Dette stemmer også overens med Radford (2018) sine funn der elevene nådde høyere generaliseringsnivå jo lenger de hadde arbeidet med slike typer oppgaver.

6.8 Utvikling av elevenes strategier

I denne delen av kapittelet vil vi forsøke å svare på forskningsspørsmålet «Hvordan utvikles elevenes strategier?».

Ut fra analysen vår begynte gruppene enten med tellestrategien eller rekursiv strategi, som er de ikke-eksplisitte strategiene. De to første deloppgavene i bordproblemet ber elevene om å finne figurtallet til relativt lave figurnummer, og det kan derfor være enkelt for elevene å telle seg videre til ønsket figur fra de tre første figurene som blir vist på tavlen. Ettersom de to første oppgavene ber om å finne lave figurnummer, er det ikke sikkert at elevene ser det som nødvendig å finne en mer effektiv måte å løse oppgaven på, slik som å prøve å finne en formel. Den første deloppgaven i det voksende mønsteret ber elevene om å tegne den neste figuren i rekken, og det kan forklare hvorfor samtlige grupper benyttet seg av tellestrategien på denne oppgaven.

Etter at gruppene har brukt tellestrategien eller rekursiv strategi, er det store variasjoner på hvilken strategi de går videre til. I deloppgave b) på det voksende mønsteret spør vi etter figurtallet til figurnummer 8, og her bruker de fleste gruppene hel-objekt strategien. Denne strategien blir mest sannsynlig brukt, fordi de tidligere hadde funnet figurtallet til figurnummer 4 og tenkt at man kan doble figurtallet. Man kan derfor si at inngangsverdiene som er valgt på oppgave a) og b) i det voksende mønsteret kan ha påvirket elevene til å gå over til å bruke hel-objekt strategien. Dette samsvarer også med Lannin et. al (2006) sine funn der en dobling av inngangsverdiene fra et spørsmål til det neste var en av faktorene som påvirket elever til å ta i bruk hel-objekt strategien. I deloppgave c) i bordproblemet går elevene bort fra tellestrategien og rekursiv strategi. I denne deloppgaven blir de spurt om å finne figurtallet til figurer langt ut i rekken, og flere av gruppene ser det som nødvendig å finne en mer effektiv strategi. To av gruppene gikk videre til kontekstuell strategi. Lannin et al. (2006) fant også at dersom inngangsverdiene var høye og langt fra de tidligere inngangsverdiene, gikk elever over til å bruke det de omtaler som eksplisitt strategi, som går ut på det samme som kontekstuell strategi. Gruppe 1 oppdaget på denne deloppgaven at det var plass til figurnummeret på hver langside og at det alltid var plass til to på ytterkantene. Dette oppdaget de på egenhånd og klarte raskt å regne ut figurtallet. Gruppe 2 oppdaget til slutt det samme som gruppe 1 gjorde, men de trengte litt veiledning fra læreren for å ta i bruk kontekstuell strategi. Gruppe 3 brukte grupperingsstrategien på denne deloppgaven, og grunnen til at de brukte denne kan være at de tidligere har brukt rekursiv strategi og oppdaget at figurmønsteret alltid øker med 2.

Resultatene fra analysen viser at elevene veldig sjeldent går bort fra kontekstuell strategi, når de først har tatt den i bruk og forstått hvordan den brukes.

Det ser ut til at det er noen faktorer som påvirker hvilke strategier elevene velger å bruke. Elevenes visuelle bilde av den algebraiske situasjonen er en faktor som påvirker hvilken strategi de velger å bruke. I figurmønstre der den forrige figuren kan observeres i den følgende figuren, gjør at elevene enklere kan observere endringene mellom figurene, og dermed bruke rekursiv strategi (Lannin et al., 2006, s. 21-22). Det voksende mønsteret gir en situasjon der det forrige tilfellet kan observeres i neste tilfelle. Det kan være en forklaring på hvorfor gruppe 2 brukte rekursiv strategi på deloppgave b) og c). Det var mindre bruk av rekursiv strategi på bordproblemet, noe som kan skyldes at den forrige figuren ikke var like lett å oppdage i den neste figuren. Gruppe 3 brukte imidlertid rekursiv strategi i løpet av arbeidet med bordproblemet. En mulig forklaring på dette er at de kan ha oppdaget den rekursive sammenhengen ved å regne ut flere figurtall og se økningen fra figur til figur på denne måten, fremfor å oppdage det ved hjelp av den visuelle representasjonen.

Lannin et al. (2006) trekker frem flere faktorer som leder elevene inn på bestemte strategier. De fant blant annet at dersom elever ikke hadde et sterkt visuelt bilde av problemsituasjonen og om en figur var et multiplum av en tidligere figur, var det stor sannsynlighet for at elevene brukte hel-objekt strategien. Ettersom hel-objekt strategien ble brukt feil i alle tilfellene i vår studie, viser det til at elevene mest sannsynlig ikke hadde et godt nok visuelt bilde av situasjonen, som ledet dem til feil svar. Dette samsvarer med Lannin et al. (2006) sine resultater, der elever med et sterkere visuelt bilde av hvordan dobling er relatert til situasjonen kan føre til at man innser hvilke justeringer som må til for å unngå over- eller undertelling (s. 16).

6.9 Peking

Underveis i oppgaveløsningen i både bordproblemet og det voksende mønsteret kom det frem at flere av elevene brukte peking for å henvise til det figurnummeret de omtalte, fremfor å navngi det med ord. Dette kan ha gjort det vanskeligere for elevene fordi de ble avhengig av å både høre hva gruppemedlemmene sa og følge med på håndbevegelsene deres. Selv om uttalelsene kunne blitt mer presise om de hadde brukt begrepet «figur nummer ...», så det ut til at de resterende medlemmene på gruppene godtok bruken av gester uten videre komplikasjoner. Alibali et al. (2014) fremhever også at bruk av peking på denne måten vil kunne føre til at mottakerne får samme referanse som den som prater.

Radford (2018) fant i sin studie av kanadiske 4. klasse elever at flere av dem opplevde utfordringer med å uttrykke forhold i figurmønsteret med naturlig språk, og at de ofte brukte gester som peking for å henvise til ulike deler av figurmønsteret. Det samme finner vi også blant våre informanter ved at de peker for å henvise til den delen av figuren de omtaler. Eksempelvis kan vi se dette hos Andreas (16) i gruppe 1, dialog 2, på bordproblemet der han sier følgende:

«*16 Andreas: Jo, fordi det er 3 der *peker på den ene langsiden i figur 3* og 3 der *peker på den andre langsiden i figur 3* og da blir det 1 pluss 1 *peker på de to ytterkantene*, så det blir det samme på de andre også»*.

I dette utsagnet ser vi at pekingen fungerer som en støtte til å forstå hvor i figur 3 Andreas mener at det er plass til 3 personer, og hvor det er plass til én person.

I transkripsjonene oppdaget vi en forskjell i elevenes språkbruk og uttrykkelsesmåter i de to oppgavene. Selv om bordproblemet var oppgaven elevene arbeidet med først, var det flere elever som uttrykte seg mer presist i arbeid med denne enn de gjorde i oppgaven om det voksende mønsteret. I bordproblemet refererte elevene oftere til figuren når de omtalte den, eksempelvis: «Da er det 6 på bord 2», «Vi tar bort 5 bord, fordi det er 12 personer» og «vi bytter bordtallet med x». I det voksende mønsteret ble sirkler eller figurnummer sjeldnere nevnt, der nevnes figurnummeret stort sett ved opplesning av oppgaven. Når elevene henviste til figurnummeret eller ulike deler av figuren i det voksende mønsteret, brukte de oftere peking fremfor naturlig språk. Fra transkripsjonene kan man se at elevene bruker peking 57 ganger i det voksende mønsteret, mot 45 i bordproblemet. En grunn til dette kan være måten mønstrene er utformet på.

Warren (2005) skriver at det er lettere for elever å uttrykke og beskrive mønsteret om sammenhengen mellom mønsteret og figurnummeret er eksplisitt. Mønsteret i bordproblemet uttrykker denne sammenhengen eksplisitt ved at langsidene av bordet har plass til like mange personer som figurnummeret, i tillegg til at bordene i figurmønsteret representerer figurnummeret. I det voksende mønsteret kan man også se denne sammenhengen eksplisitt dersom man oppfatter mønsteret som en sirkel og tre utstikkere fra denne, der utstikkerne representerer figurnummeret. Denne sammenhengen er kanskje ikke like tydelig for alle elevene som sammenhengen i bordproblemet, noe som kan forklare hvorfor elevene uttrykker seg tydeligere der. Man ser også ut fra elevenes gester at det virker som om de fleste oppfatter mønsteret som en vertikal og en horisontal rekke. En annen grunn til at elevene gjerne presiserer tydeligere hvilket bord de snakker om, eller om det er bord eller personer, kan være at bordproblemet har en mer virkelighetsnær kontekst enn det voksende mønsteret. De kan også se bord og stoler rundt seg og har dermed muligheten til å se at det stemmer med konkrete objekter.

En annen oppdagelse er at den strategien som i gjennomsnitt fører til mest peking blant våre informanter, er hel-objekt strategien. En mulig forklaring på dette er at elevene henviser til flere ulike figurnummer, og bruker peking i mangel på et felles begrep for figurnummer. En annen mulighet er at elevene bruker peking for at de andre lettere skal forstå hvilken figur de snakker om, da det diskuteres mellom flere ulike kombinasjoner av figurnummer. Det er likevel verdt å bemerke at hel-objekt strategien er en av de som forekommer minst i vårt datamateriale, og at dette derfor kan ha noe å si for at denne slår ut som den med mest peking i gjennomsnitt.

I de tilfellene elevene benytter kontekstuell strategi er det stor forskjell på bruken av peking i bordproblemet og i det voksende mønsteret. Der kontekstuell strategi i bordproblemet er den strategien som viser nest mest peking, er den i det voksende mønsteret den som fører til minst peking. Samtidig ser man også at elevene samlet sett beveger seg til høyere generaliseringsnivå i det voksende mønsteret enn i bordproblemet. Etter hvert som elevene beveger seg til et høyere generaliseringsnivå bruker de naturlig språk til å forklare de generelle sammenhengene, og deretter alfanumerisk notasjon. Det er derfor mulig å anta at elevenes peking avtar etter hvert som de når et høyere generalitetsnivå.

I noen strategier vil det være mer naturlig å bruke peking enn andre. Tellestrategien er gjerne en strategi der det vil være naturlig for elevene å peke, ettersom de teller antall elementer en figur består av. Bruken av peking i denne strategien er mest sannsynlig ikke på grunn av mangelen på et fellesbegrep, men heller at det er vanlig for barn å peke samtidig som de teller. Radford (2009) mener at peking blir sett på som en integrert del av tenkningen, fordi tenkning ikke kun skjer i hodet, men også gjennom gester (Radford, 2009, s. 111). At mangelen på fellesbegrep ikke er grunnen til peking i denne strategien forsterkes også av at de her ikke bruker peking som et alternativ til naturlig tale, men som et tillegg. Det fungerer derfor som en forsterker til det de sier ved naturlig språk og som et hjelpemiddel til elevenes tanker. Vi har tidligere drøftet og konkludert med at elevenes bruk av tellestrategien innebærer lav grad av algebraisk tenkning. Som nevnt i forrige avsnitt er det mulig å anta at et høyere generaliseringsnivå fører til mindre peking. Når elevene ikke når et høyt generaliseringsnivå ved bruk av tellestrategien, kan dette også spille inn på hvorfor de bruker mer peking i denne strategien, enn andre strategier de har brukt.

6.10 Studiens styrker og begrensninger

Enhver studie vil inneholde ting som kan virke styrkende og deler som vil være begrensende. I dette delkapittelet vil vi drøfte noen styrker og begrensninger ved vår studie, da det vil kunne gi leseren et innblikk i ting som bør tas i betraktning når den vurderer informasjonen som kommer ut av denne studien.

Studien vår baserer seg på 12 informanter som skal si noe om den algebraiske tenkningen og strategibruken til elever på 4. trinn. Dette er et relativt lite utvalg med tanke på hvor mange 4. trinnselever vi har i Norge. Det er derfor viktig å understreke at resultatene i denne studien ikke med sikkerhet kan representere alle 4. trinnselevers algebraiske tenkning og strategibruk, men den kan likevel si noe om tendensene. Vi kunne ha brukt flere informanter og jobbet med lignende oppgaver over en lengre periode for å styrke studiens eksterne validitet ytterligere.

Rammeverkene vi har valgt for å analysere resultatene våre vil være en begrensning med denne studien. Ved å velge et bestemt rammeverk man ser på dataene sine gjennom, vil man naturlig lete etter ting som passer i kategoriene i rammeverket. Dette kan ha gjort at vi ubevisst tillegger tolkninger til våre informanters utsagn, som gjør at de passer inn i en kategori. Vi har forsøkt å være bevisst på å ikke kategorisere noe som en strategi bare for å få det til å passe inn i rammeverket. Vi valgte derfor å utvide rammeverket etter at vi hadde samlet inn data, fordi vi oppdaget at det ble brukt noen strategier som ikke passet inn. Dette vil kunne fremgå som en styrke ved vår studie, da det viser at vi er åpne for at det kan fremkomme ting i datamaterialet vi ikke hadde antatt på forhånd. På lik linje med rammeverket vi har valgt for strategier, vil også rammeverket for algebraisk tenkning være en begrensning. Hva som kvalifiserer som algebraisk tenkning og ikke er det stor uenighet om i litteraturen, da spesielt med tanke på alfanumerisk notasjon. Ulike syn på dette er presentert i kapittel 4.3 i teoridelen. Dersom vi hadde valgt å støtte oss på en av de forskerne som at mener alfanumerisk notasjon er et krav for algebraisk tenkning, ville flere av gruppenes strategibruk ikke kunne kvalifisert som algebraisk tenkning.

En metodisk styrke med oppgaven er at vi har valgt å la elevene arbeide på vertikale tavler. Dette gjør at vi som forskere får lettere tilgang til å se hva elevene skriver og tegner når de løser oppgavene, noe som gjør at vi får et bedre grunnlag for å kategorisere strategiene deres, enn om de for eksempel hadde skrevet på ark. Det gjør også at vi får innsikt i tankegangen til elevene som ikke fremkommer via naturlig språk, da gester gjerne kommer mer til syne når de har en felles tavle å peke på. Selv om de vertikale tavlene er med på å styrke funnene våre, har de også noen begrensninger. Elevene i studien har som tidligere nevnt arbeidet lite på denne måten, noe som kan ha gjort at de arbeidet annerledes enn de vanligvis ville gjort.

En styrke ved denne studien er at kategoriseringen i analysen har blitt grundig gjennomgått. For å plassere elevenes strategier i mest mulig riktig kategori har forskerne i denne studien kategorisert transkripsjonene hver for seg, for å kontrollere at vår tolkning av strategiene i rammeverket samsvarer. Vi har også gått gjennom transkripsjonene på nytt etter analysen og drøftingen for å være sikker på vår plassering av elevenes strategier stemmer overens med strategiene i rammeverket.

7. Konklusjon

I denne oppgaven har vi studert hvilke strategier elever benytter når de arbeider med oppgaver knyttet til figurmønster og hva dette sier om deres algebraiske tenkning. I tillegg har vi sett på hvordan strategiene til elevene utvikler seg. Problemstillingen oppgaven har tatt utgangspunkt i er:

«Hvordan arbeider elever på 4. trinn med figurmønsteroppgaver, og hvordan kommer den algebraiske tenkningen frem i de ulike generaliseringsstrategiene elevene benytter?»

Følgende tre forskningsspørsmål ble utformet med utgangspunkt i å svare på problemstillingen: *«Hvilke strategier bruker elever på 4. trinn når de arbeider med figurmønsteroppgaver?»*, *«Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?»* og *«Hvordan utvikles elevenes strategier?»*

For å kunne svare på disse spørsmålene ble det gitt to figurmønsteroppgaver elevene skulle arbeide med på vertikale tavler. Vi brukte videoopptak og observasjoner av elevenes arbeidsprosess, som hjelp til å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene.

Datamaterialet vårt er beskrevet og analysert i kapittel 5 (analyse) og videre drøftet i lys av teorien i kapittel 4 (teori), i kapittel 6.

Resultatene fra denne studien viser at elevene bruker fire av de fem strategiene vi opprinnelig så etter. Disse var tellestrategien, rekursiv strategi, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. Prøve og feile strategien ble det ikke funnet bruk av. I tillegg kom det frem to andre strategier som ikke passet inn i rammeverket vi brukte for å analysere elevenes strategier. Rammeverket ble derfor utvidet, og del-hel strategien og grupperingsstrategien ble inkludert. Det kom tydelig frem i analysen at elevene byttet på å bruke flere strategier i arbeid med en oppgave. Det kom også frem at de brukte den informasjonen og de erfaringene de har gjort med en strategi, når de går over til en ny strategi.

Tellestrategien var den strategien de fleste elevene valgte å begynne med. Dette var mest sannsynlig for å skaffe seg informasjon om figurmønsteret og hvordan det utviklet seg. Rekursiv strategi var også en naturlig inngang for elevene, da de brukte denne for å se hvordan figurmønsteret endret seg fra figur til figur.

Hel-objekt strategien eller kontekstuell strategi ble gjerne brukt etter at elevene først hadde brukt tellestrategien eller rekursiv strategi. Elevene brukte hel-objekt strategien da de skulle finne antall elementer i en større figur. Denne strategien ble vanligvis brukt når de oppdaget at en allerede kjent figur var et multiplum av figuren de skulle finne, men den førte i hvert tilfelle til over- eller undertelling. Kontekstuell strategi ble brukt når de hadde skaffet seg en god oversikt over hvordan figurmønsteret utviklet seg. Dette var den eneste strategien som førte elevene til en generell regel som fungerte for en hvilken som helst figur.

Vi har også forsøkt å analysere hva elevenes strategibruk sier om deres algebraiske tenkning. Analysene våre viser at det er store forskjeller på elevenes algebraiske tenkning, avhengig av hvilken strategi de bruker. Noen strategier fører elevene lenger inn i generaliseringsprosessen, mens andre strategier ikke gjør det.

På bakgrunn av våre analyser har vi konkludert med at den ene eksplisitte strategien (kontekstuell strategi) krever større grad av algebraisk tenkning for å kunne oppdage sammenhenger i figurmønsteret. De ikke-eksplisitte strategiene (tellestrategien og rekursiv strategi) krever mindre grad av algebraisk tenkning, men det finnes likevel noe algebraisk tenkning til stede. Hel-objekt strategien viste ingen grad av algebraisk tenkning i datamaterialet til denne studien, ettersom samtlige grupper brukte denne feil. Vi fant også at elevene ved to anledninger gikk rett fra et faktuelt generaliseringsnivå til symbolsk generaliseringsnivå. Vi kan ikke si at dette har hatt en stor betydning for elevenes forståelse, da elevene som hoppet over et nivå forklarte bruken av alfanumerisk notasjon på en god måte.

Selv om elevene arbeider med tellestrategien og finner ut hvor mange elementer det er i en figur ved hjelp av denne, kan de oppdage sammenhenger og forklaringer for hvordan figurmønsteret utvikler seg. Dette vil være en verdifull læring for elevene, og gir mulighet for å utvikle den algebraiske tenkningen deres når de arbeider med slike oppgaver senere i skoleløpet.

Det siste forskningsspørsmålet vårt tar for seg utviklingen av elevenes strategier. Resultatene fra analysen viser at elevene sjeldent går tilbake til en ikke-eksplisitt strategi når de har brukt en eksplisitt strategi. Det er flere faktorer som spiller inn for hvilken strategi de begynner med og hvilken strategi de går videre med. Hva oppgaven spør etter har ofte stor betydning for hvilken strategi elevene velger å bruke.

7.1 Videre forskning

I denne studien har vi sett på hvilke strategier elever på 4. trinn benytter når de arbeider med figurmønster og hva dette sier om deres algebraiske tenkning. Det er mange muligheter for videre forskning rundt dette temaet. En mulighet kunne vært å ha gjennomført de samme undervisningsoppleggene med flere elever på 4. trinn. Denne studien tar for seg et lite utvalg av 4. trinnselever og det hadde vært interessant å se om det hadde vært store forskjeller dersom man hadde gjort det samme med flere elever fra forskjellige skoler. Det hadde også vært interessant å arbeide med figurmønsteroppgaver med de samme elevene over en lengre periode for å se om elevene utviklet sin algebraiske tenkning ytterligere, og om de forholdt seg til de samme strategiene eller ikke. Her hadde det vært spennende å sett om de hadde forsøkt å komme frem til en generell formel mye tidligere i arbeidsprosessen.

En interessant oppdagelse under arbeidet med denne masteroppgaven var at hel-objekt strategien førte til overtelling i hvert tilfelle denne ble brukt. Vi har ikke funnet forskning på hvordan man bør gå frem for å få elevene til å forstå hvilke justeringer som må til for at denne strategien skal fungere optimalt. Mer forskning på nettopp dette vil kunne være et godt bidrag til hvordan lærere kan veilede elever som bruker hel-objekt strategien på samme måte som våre informanter har gjort.

En annen ting som kunne vært forsket mer på er nødvendigheten av å følge generaliseringsnivåene stegvis. I denne studien ble det funnet at enkelte av elevene hoppet over et generaliseringsnivå uten at det fikk konsekvenser for deres forståelse under arbeidet med disse oppgavene. Ettersom dette bare forekom to ganger, kan det være interessant å undersøke om flere elever hopper over et generaliseringsnivå og eventuelle konsekvenser det kan få på lang sikt.

Litteraturliste

Alibali, M.W., Nathan, M. J., Wolgram, M. S., Church, R. B., Jacobs, S. A., Martinez, C. J., Knuth, E. J. (2014). How Teachers Link Ideas in Mathematics Instruction Using Speech and Gesture: A Corpus Analysis. *Cognition and Instruction*, 32(1), 65-100. https://doi.org/10.1080/07370008.2013.858161

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap.* Cappelen Damm akademisk.

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal,* 12(2), 107-126. https://doi.org/10.1007/BF03217079

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 27-49). Springer International Publishing.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 107-138). Springer International Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. I J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 235–272). Mahwah: Erlbaum.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Cooper, T. J. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early Algebrazation: A Global Dialouge from Multiple Perspectives* (s. 187-214). Springer.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Dialog, samspel og læring.* Abstrakt forlag.

Earnest, D. & Balti, A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary schools: Findings from a research-practice collaboration. *Teaching Children Mathematics*, 14, 518-522.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable trough Pattern Exploration. *The mathematics teacher*, 91(2), 166-170. https://www.jstor.org/stable/27970471

Forvaltningsloven. (1970). *Lov om behandlingsmåten i forvaltningssaker* (LOV-1967-02-10). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1967-02-10

Francaviglia, M. & Servidio, R. (2011). Gesture as a Cognitive Support to Solve Mathematical Problems. *Psychology,* 2(2), 91-97. doi: 10.4236/psych.2011.22015.

Geertz, C. (1973). Thick description: Toward an interpretive theory of culture. I *The Interpretation of Cultures* (s.3-30). Basic Books.

Geertz, C. (1983). Thick Description: Toward an Interpretive Theory of Culture. I R. Emerson (Red.), *Contemporary Field Research: A Collection of* Readings (s. 37-59). Prospect Heights: Waveland.

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter: Å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis. Cappelen damm akademisk.*

Gilje, N. & Grimen, H. (1993). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger: Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi*. Universitetsforlaget.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Fremgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Akademika forlag.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2012). *QED 1-7: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen. Bind 1*. Høyskoleforlaget.

Hønnås, L. M. (2022). *Elevers generaliseringsstrategier og algebraiske tenkning i møte med figurtall* [Masteroppgave, Inland Norway University]. NORA - Norwegian Open Research Archives. https://hdl.handle.net/11250/3019348

Johannessen, L. E. F., Rafoss, T. W. & Rasmussen, E. B. (2018). *Hvordan bruke teori?: Nyttige verktøy i kvalitativ analyse*. Universitetsforlaget.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg.). Abstrakt forlag.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kalleberg, R. (1996). Forskningsopplegget og samfunnsforskningens dobbeltdialog. I R. Kalleberg (Red.), *Kvalitative metoder i samfunnsforskning* (2. utg., s. 26-72). Universitetsforlaget

Karlsen, L. (2014). *Tenk det!: utforskning, forståelse og samarbeid – elever som tenker sjæl i matematikk.* Cappelen damm akademisk.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. I J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. I Vergnaud, G., Rogalski, J. & Artique, M (Eds.), Proceedings of the 13th International Conference for the Psycology of Mathematics Education (Vol. 2., s. 163-171). Laboratoire PSYDEE.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I E. P. Nesher, & J. Kilpatrick (Red.), Mathematics and cognition (s. 96-112). Cambridge University Press.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskningsdesign og kvalitativ metode: ei innføring*. Fagbokforlaget.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Reasearch Journal*, 18(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Lee, L. & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(9), 428–433. https://doi.org/10.5951/MTMS.11.9.0428

Liljedahl, P. (2021). Building thinking classrooms in mathematics, grades k-12: 14 teaching practices for enhancing learning. Corwin.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65–86). Dordrecht.

Novack, M. & Goldin-Meadow, S. (2015). Learning from Gesture: How Our Hands Change Our Minds. Educational Psychology Review, 27(3), 405-412. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9325-3

Personopplysningsloven. (2018). *Lov om behandling av personopplysninger (personopplysningsloven)* (LOV-2018-06-15-38). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2018-06-15-38

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. (2. utg.). Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm akademisk.

Radford, L. (1996) Some Reflections on Teaching Algebra trough Generalization. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee, *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 107-111). Springer Netherlands.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: A semiotic perspective. PME-NA 2006 Proceedings, 2-21.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical mean. *Educational Studies in Mathematics,* 70(2), 111-126. http://www.jstor.org/stable/40284564

Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.* PNA 4(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 303-322). Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 83-96. 10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2018). The Emerge of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. I C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 3-25). Springer International Publishing.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-203. https://www.jstor.org/stable/41182215

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Säljö, R. (2006). *Læring og kulturelle redskaper: om læreprosesser og det kollektive minnet*. (S. Moen, Overs.). Cappelen Akademisk forlag. (Opprinnelig utgitt 2005).

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* (3. utg.) Gyldendal akademisk.

Thompson, A. G. & Thompson, P. W. (1995). A cognitive perspective on the mathematical preparation of teachers: The case of algebra. I C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 95-116). Washington, DC: US Department of Education.

Utdanningsdirektoratet. (2013*). Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/MAT1-04#

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2022). *Den internasjonale studien TIMSS*. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss/

Vygotsky, L. S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. (1978). *Mind in* *society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 305-312.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Actions That Support 8 Year Olds' Thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 67(2), 171-185. https://www.jstor.org/stable/pdf/40284649.pdf

Warren, E., Miller, J. & Cooper, T. J. (2013) Exploring young students´functional thinking. *PNA* 7(2), 75-84. https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.6131

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379– 402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Øzerk, K. Z. (1996). Ulike språkoppfatninger, begrepskategorier og et undervisningsteoretisk perspektiv på skolefaglig læring. I I. Bråten (Red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 97-119). Cappelen Akademisk Forlag.

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema til foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet *" Elevers algebraiske tenkning og generaliseringsstrategier"*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å finne ut hvilke strategier elever bruker når de arbeider med mønstergeneralisering og hva dette sier om deres algebraiske tenkning. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke hvilke strategier elever benytter når de arbeider med tidlig algebra, ved hjelp av mønstergeneralisering. Studiens omfang er på omtrent 12 elever som arbeider sammen i grupper på ca. 3 elever per gruppe. TIMSS-undersøkelsen måler elevers kunnskap i matematikk og naturfag, og et sentralt funn fra undersøkelsen er at norske elver scorer dårlig i tall og algebra. Vi vil derfor undersøke hvordan elever arbeider med tidlig algebra, slik at dette forhåpentligvis kan bidra til en bedre undervisning i tidlig algebra.

Forskningsprosjektet er den avsluttende delen av en masterstudie i grunnskolelærerutdanning på 1.-7.-trinn. Opplysningene som kommer frem i forskningsprosjektet vil bare bli behandlet av oss og veileder. Informantenes opplysninger vil bli slettet etter studien og ikke brukt i andre studier senere.

Problemstillingen for prosjektet er *«Hvordan arbeider elever på 4. trinn med figurmønsteroppgaver, og hvordan kommer den algebraiske tenkningen frem i de ulike generaliseringsstrategiene elevene benytter?»*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Høgskolen i Innlandet, avdeling Hamar-fakultet for lærerutdanning og pedagogikk er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi ditt barn er elev på 4. trinn ved ... skole, som har stilt seg positive til å delta i prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Dersom du samtykker til at ditt barn kan delta i prosjektet, innebærer dette at h*n kan bli valgt ut til å delta i gruppearbeid der oppgaven er å arbeide med figurmønster. Vi vil benytte videoopptak under elevenes arbeid i tillegg til observasjon. Videoopptaket vil bli slettet etter at dataene til prosjektet har blitt analysert.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Forskere og veileder fra Høgskolen i Innlandet er de eneste som vil ha tilgang til opplysningene. Videofilene lagres på en ekstern lagringsenhet som vil være innelåst når de ikke benyttes. Samtykkeskjema som inneholder navn på deltakerne oppbevares adskilt fra videoopptak. Samtykkeskjemaene vil makuleres ved prosjektets slutt og videoopptak vil slettes. Deltakerne vil bli anonymisert i masteroppgaven og vil på ingen måte kunne kjennes igjen når resultatene publiseres.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes i mai 2023. Alle opplysninger og videoopptak blir slettet når oppgaven er godkjent i juni/juli 2023.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra *Høgskolen i Innlandet, avdeling Hamar* har Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *Helene Olsen Fagerli (forsker)* ved *Høgskolen i Innlandet*, helene.fagerli98@hotmail.com eller på telefon 91600844
- *Stine Hopsdal Grøttveit (forsker)* ved *Høgskolen i Innlandet*, stinehopsdal@hotmail.com eller på telefon 48287080
- *Reinert Rinvold (veileder)* ved *Høgskolen i Innlandet*, reinert.rinvold@inn.no eller på telefon 62517889
- Vårt personvernombud: *Usman Asghar,* usman.asghar@inn.no på telefon 61 2874 83

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikt sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør på epost (postmottak@sikt.no) eller på telefon: 55 58 21 17

Med vennlig hilsen

Reinert Rinvold	*Helene Olsen Fagerli & Stine Hopsdal Grøttveit*
(Veileder)	(Forskere)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Elevers algebraiske tenkning og generaliseringsstrategier*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ At mitt barn kan delta i videoopptak under gruppearbeid med en oppgave knyttet til figurmønster

Jeg samtykker til at ________s (navn på barn) opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltakers foresatt, dato)

Vedlegg 2 – Prosessdokument

Dette prosessdokumentet beskriver den gjennomførte samarbeidsprosessen mellom studentene Helene Olsen Fagerli og Stine Hopsdal Grøttveit i forbindelse med utarbeidelsen av vår masteroppgave. Formålet med dokumentet er å gi en oversikt over ansvars- og arbeidsfordelingen mellom oss, samt sikre at begge studenter har bidratt med likeverdige bidrag til den ferdige masteroppgaven.

Vi ønsker å understreke at i utarbeidelsen av vår masteroppgave har vi ikke hatt hovedansvar for spesifikke områder. I stedet har vi valgt å jobbe sammen på tvers av alle områdene i oppgaven for å oppnå en helhetlig og integrert tilnærming. Vår intensjon har vært å dra nytte av hverandres styrker, komplementere hverandres ferdigheter og sikre at begge studenter har bidratt likeverdig til den endelige masteroppgaven.

Selv om vi ikke har hatt hovedansvar for spesifikke områder, har vi likevel hatt et likeverdig og gjensidig engasjement i alle aspekter av masteroppgaven. Vår kollektive innsats har vært avgjørende for å oppnå et vellykket resultat som demonstrerer våre kombinerte ferdigheter, innsikt og forståelse av temaet.

Vi har fulgt en strukturert samarbeidsprosess gjennom hele prosjektet for å sikre effektiv kommunikasjon og samarbeid. Prosessen inkluderer følgende elementer:

a. Regelmessige møter: Vi har avholdt jevnlige møter hvor vi har diskutert fremdrift, utfordringer og beslutninger knyttet til masteroppgaven. Møtene har funnet sted på høgskolens bibliotek, eller hjemme hos hverandre.
b. Dokumentdeling: Vi har brukt OneDrive for å dele dokumenter, filer og annen relevant informasjon.
c. Beslutningsprosesser: Alle viktige beslutninger angående masteroppgaven er blitt tatt i fellesskap gjennom diskusjoner og konsensus.

Vi har sikret at begge studenter har bidratt med likeverdige bidrag inn i masteroppgaven ved å følge ansvarsfordelingen og samarbeidsprosessen som er beskrevet.