Fakultet for lærerutdanning og pedagogikk

Mali Liberg Hønnås

Masteroppgave

Elevers generaliseringsstrategier og algebraiske tenkning i møte med figurtall

Students generalization strategies and algebraic thinking when working with figural patterns

Master i realfagenes didaktikk

2022

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på mitt studieløp på master i realfagenes didaktikk. År jeg ser tilbake på som svært lærerike og verdifulle for mitt fremtidige virke i læreryrket. Prosessen rundt denne masteroppgaven har vært både spennende og ekstremt krevende. Det har ført til mye frustrasjon, men har også vært en verdifull læringsprosess med mye jeg tar med meg videre.

Jeg vil rette en stor takk til familie og venner som både har stilt opp med hjelp rundt praktiske ting når jeg har måttet fokusere på oppgaven, men også for mange støttende ord og samtaler underveis.

En stor takk går også til skolen og elevene som var positive og stilte opp i min studie.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til min veileder, Reinert Rinvold, for god støtte og hjelp underveis i skrivingen.

Frosta, mai 2022

Mali Liberg Hønnås

Innholdsfortegnelse

Norsk sammendrag

Denne masteroppgaven tar for seg elevenes strategier for å generalisere formler for figurmønstre. I min studie har jeg både studert hvilke strategier elevene bruker, men også hva disse strategiene sier om deres algebraiske tenkning.

For å gjennomføre undersøkelsen ble det benyttet kvalitativ metode. Metoden er valgt for å gi muligheten til å komme tett innpå hvordan elevene arbeider og tenker når de jobber med figurmønstre. Undersøkelsen ble gjennomført på 9. trinn, med to grupper elever. Hver gruppe besto av 3 elever. Dataene ble innhentet gjennom observasjon, videoopptak og elevenes skriftlige notater.

Elevenes strategier ble kategorisert i fem ulike strategier som er benyttet som analyseredskap i denne studien: tellestrategien og rekursjonsformelstrategien (ikke-eksplisitte strategier) og prøve og feile strategien, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi (eksplisitte strategier).

Gjennom analysen kom det frem at elevene i stor grad hopper mellom de ulike strategiene, og at de ikke forholder seg til en enkelt strategi gjennom hele oppgaven. De tok med seg erfaringene og informasjonen de fant gjennom bruk av en strategi over til en annen strategi for å komme seg videre. Resultatene tyder også på at elevene i stor grad angriper oppgaven ved hjelp av tellestrategien og rekursjonsformelstrategien for å få kjennskap til mønsteret, og at de deretter går over til prøve og feile strategien dersom de ikke fikk dannet seg et godt overblikk over hvordan figurmønsteret utviklet seg. Ved bruk av denne strategien har de også lav grad av algebraisk tenkning. Dersom de har funnet en utvikling i figurmønsteret som de forstår er det større sannsynlighet for at de jobber videre ved hjelp av hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. Disse strategiene har også en høyere grad av algebraisk tenkning involvert.

Engelsk sammendrag (abstract)

During this paper, I have studied students' generalization strategies when working with figural patterns. I have both studied what kind of strategies the students are using, but also what these strategies are telling us about their ability to think algebraically.

I used qualitative methodology to be able to closely examine how the students were working and thinking when attempting to solve figural patterns. The collection of data was done with two groups of students from the 9th grade. Each group consisting of 3 students each. The data was collected through observation, video and the students own written notes.

The students' strategies were categorized into five different strategies. The non-explicit strategies (counting strategy and recursive strategy) and the explicit strategies (trial and error, whole-object strategy and contextual strategy).

Through my analysis it was found that the students were working with different strategies throughout their working session, not sticking to one exact strategy the entire time. They obtained information about the figural pattern through one strategy, which they then used when switching to another strategy. My results also indicates that the students may attempt to tackle a task using the counting strategy and the recursive strategy before moving on to either trial and error (if they didn't get a good understanding of the figural pattern) or the whole-object strategy or contextual strategy (if they got a clear understanding of how the figural pattern developed). The latter shows a much higher degree of algebraic thinking.

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

I Norge har det vært en kjent problematikk at mange elever har problemer med matematikk. Dette kommer godt frem i TIMSS undersøkelsen, som gjennomføres i Norge hvert fjerde år. Undersøkelsen ble første gang gjennomført i 1995, og Norge har deltatt i hver undersøkelse med unntak av i 1999. TIMSS måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 5. og 9. trinn. Det har vært et sentralt funn i undersøkelsen at norske elever scorer dårligst i tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

I den nyeste TIMSS-rapporten fra 2019 ser vi at Norge generelt er på samme nivå som de andre Nordiske landene når det gjelder prestasjoner i matematikk. Vi ligger over eller på samme nivå i alle emneområder, med unntak av i algebra hvor vi ligger et godt stykke under. På TIMSS skalaen scorer Norge til at vi ligger på lavt nivå innenfor algebra (Kaarstein et al., 2020).

I *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (2000) sies det at algebra er en inngangsport for elevenes fremtidige studier og viktige matematiske prinsipper, men at dette emneområdet ofte sperrer veien for mange. Bishop (2000) sier at de teknologiske utviklingene i samfunnet har ført til at arbeidsplasser i nyere tid har stort behov for arbeidere med solid matematisk kompetanse som tilsier at de er i stand til å utforske og løse problemer logisk.

I læreplanen til matematikk for 1.-10. trinn i LK20 står det under punktet «fagrelevans og sentrale verdiar»:

« Matematikk skal bidra til at elevane utviklar eit presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering.»
(Utdanningsdirektoratet, 2020a)

Abstraksjon og generalisering er også opplistet som et av kjerneelementene innenfor faget. Her understrekes det også at generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer uten å bli presentert for en ferdig løsning. Dette innebærer blant annet å utforske figurer for å finne sammenhenger og formalisere disse ved hjelp av algebra (Utdanningsdirektoratet, 2020a).

Stacey (1989) hevder at å finne og bruke mønster er en viktig strategi for matematisk problemløsning. (Hargreaves et al., 1998) sier at å koble sammen mønstre med tall, geometri og beregninger hjelper elevene å forstå sammenhengen mellom matematiske temaer. De skriver også at arbeid med figurmønstre hjelper elevene å lete etter regulariteter og sammenhenger, og oppfordrer til generalisering. Muligheten til å jobbe med figurmønstre er sett på som en viktig inngangsport til algebra.

På bakgrunn av den tidligere forskningen som er nevnt, og særlig med tanke på de problemene som er dokumentert angående elevenes mestring av algebra, ser jeg det som svært relevant å undersøke nærmere hvordan en kan undervise algebra på en god måte i skolen. Jeg opplever at dette ofte oppleves krevende for både lærere og elever. Som nåværende og fremtidig lærer i skolen ønsker jeg å få større kunnskap rundt hvordan jeg kan angripe temaet på best mulig måte sammen med elevene, slik at de føler på mestring og blir sittende med et godt grunnlag for videre studier innen matematikk.

1.2 Avgrensning

Min erfaring er hovedsakelig fra arbeid på ungdomstrinn og i videregående. Det er også på dette nivået jeg ser for meg å undervise mest i fremtiden. Basert på det var det ønskelig å gjennomføre undersøkelsen på ungdomstrinnet, nærmere bestemt 9. trinn. Alderen på de utvalgte elevene vil da også gjøre det mulig å studere mer komplekse generaliseringsprosesser i forhold til på lavere klassetrinn, samtidig som de allerede har vært gjennom et år på ungdomsskolen og det bør være realistisk å tenke at de allerede sitter inne med noe kunnskap knyttet til regning med algebra.

I læreplanen LK20 står det presisert hva elevene skal ha tilegnet seg av kunnskap innenfor de ulike temaene for hvert årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Allerede etter 8. trinn finner vi følgende læreplanmål: «beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk» og «utforske algebraiske reknereglar». Videre er et læreplanmål etter 9. trinn «beskrive, forklare og presentere strukturar og utviklingar i geometriske mønster og i talmønster».

I studien vil elevene jobbe med to oppgaver knyttet til figurtall med lineær vekst. Hovedfokuset vil være på hvilke strategier elever benytter for å komme seg fra de visuelle figurmønstrene til mer generelle algebraiske formler, samt hva disse strategiene sier om deres algebraiske tenkning.

Av tidligere forskning (som er gjort mer rede for i kapittel 2, teori), er det gjennomført flere studier der elever arbeider med figurtall som har lineær vekst. Det vil si at figurmønsteret kun utvikler seg i en retning. Majoriteten av denne forskningen er gjort i utlandet, og det finnes lite forskning på dette i Norge. Da norske elever scorer relativt lavt i algebra på tester som blant annet TIMMS, er det interessant å se på hvordan liknende arbeid med figurtall fungerer i norsk skole.

1.3 Problemstilling

Basert på valgt tema og avgrensning av oppgaven ble følgende problemstilling formulert:

«Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer i arbeid med figurtall?»

1.4 Forskningsspørsmål

Det finnes mye tidligere forskning basert på elevers arbeid med figurtall og strategiene de benytter i generalisering av disse. Dette vil gjøres nærmere rede for i teorikapittelet. Basert på tema, avgrensing og problemstilling kommer denne studien til å ta for seg følgende forskningsspørsmål:

- Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer et uttrykk basert på arbeid med figurtall?

- Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?

1.5 Oppbygging av oppgaven

Denne masteroppgaven er inndelt i seks hovedkapitler: innledning, teori, metode, datapresentasjon og analyse, diskusjon og konklusjon.

I kapittel 2, teori, vil jeg gjøre rede for det teoretiske bakteppet som er relevant for undersøkelsen. Dette inkluderer teori om algebra og regning med algebraiske metoder, men også generell teori om generalisering og figurtall, samt tidligere relevant forskning på figurtall og generaliseringsstrategier.

I kapittel 3, metode, beskrives metodene som er benyttet i studien. Her er det først redegjort generelt for aktuelle forskningsmetoder, før disse teoriene blir knyttet direkte opp mot denne oppgaven. Kapittelet inneholder også grundige forklaringer av forskningsdesignet og utvalget av elevene som deltok i undersøkelsen.

I kapittel 4, datapresentasjon og analyse, presenteres resultatene fra undersøkelsen som ble gjennomført. Disse resultatene er så analysert opp mot analyseredskapet, slik at aktuelle strategier ble identifisert og kategorisert.

I kapittel 5, diskusjon, vil resultatene drøftes og knyttes opp mot teorien som det ble redegjort for i kapittel 2. Her diskuteres både elevenes strategier og deres algebraiske tenkning.

Avslutningsvis vil jeg i kapittel 6, konklusjon, kort sammenfatte hele oppgaven og konkludere med hva resultatene fra studien viser.

2. Teori

I dette kapittelet vil det bli gjort rede for det teoretiske bakteppet som er aktuelt for denne oppgaven. Hovedsakelig vil teorien innebære relevante fakta rundt algebra, figurtall og generalisering, samt hvilke strategier som beskrives i litteraturen for generalisering av figurtall.

2.1 Algebra og algebraisk tenkning

I dette delkapittelet vil det redegjøres for noen av de mest sentrale begrepene og fenomenene som er gjennomgående i denne oppgaven.

2.1.1 Generelt om algebra og algebralæring

Algebra kan være vanskelig å definere. Det er ikke en enkelt ting, men omhandler gjerne mange aspekter ved matematikken. Likevel er algebra, særlig i skolen, gjerne forbundet med tall og funksjoner på tall. Det er å bruke symboler og å behandle generelle uttrykk som gjelder tall. Ofte er det algebra folk tenker på når de ser på matematikk som et språk. De visualiserer da gjerne en lang rekke algebraiske symboler (blant annet bokstaver). Det er likevel viktig å huske på at en rekke bokstaver og symboler i seg selv ikke er algebra. Det er mange matematiske prosesser bak, og i skolesammenheng sees det ofte på som å bruke symboler for å uttrykke generelle sammenhenger i tallkontekster (Mason, 1996). Lee (1996) beskriver algebra som en mini-kultur innenfor matematikken. Dette inkluderer algebra som et sett aktiviteter, algebra som et språk og alle andre måter å definere algebra på.

Det er mange ulike innfallsvinkler til å introdusere algebra i skolen. For eksempel at læreren presenterer reglene elevene skal benytte for å løse problemer (denne er ganske vanlig), å løse en rekke spesifikke problemer, generalisering av figurmønstre, innføring av begrepene variabler og funksjoner, og studering av algebraiske strukturer. Det er flere studier som viser at elever har problemer med introduksjonen til algebra, noe som initierer at hvordan algebra tradisjonelt introduseres i skolen bør studeres og gjennomgå en forbedring (Bednarz et al., 1996).

Lannin (2005) sier at det å introdusere algebra, særlig på lavere trinn, medfører både utfordringer og muligheter for å utvikle elevenes forståelse. Han refererer til dokumenter fra *the Australian Education Council* (1994), *the National Council of Teachers of Mathematics* (2000) i USA og *the Deparment for Education and Skills* (2001) fra Storbritannia som retter fokuset mot å hjelpe overgangen til formell algebra. Til denne overgangen blir det anbefalt bruk av oppgaver der elevene generaliserer figurmønstre. Dokumentene støtter også opp om å la elevene benytte teknologiske verktøy for å utforske sekvensene, og da benytte enten rekursive eller eksplisitte strategier. Samtidig er det å utvikle algebraisk forståelse gjennom bruk av figurmønstre utfordrende når elevene skal flytte fokuset fra praktiske enkelteksempler til generelle uttrykk (Lannin, 2005).

Det er mye forskning som tyder på at en forståelse av mønstre og struktur er viktige i tidlig matematikklæring. En studie gjort at Mulligan, Mitchelmore, Outhred og Russell (1997) studerte de strukturelle egenskapene til representasjoner av ulike numeriske situasjoner laget av elever fra 2.- 5. trinn. Studien viste at de som presterte dårlig konsekvent produserte dårlige organiserte billedlige og ikoniske representasjoner som manglet struktur, mens de som presterte høyt benyttet abstrakte notasjoner med velutviklede strukturer fra begynnelsen (Mulligan, 2002; sitert i Mulligan & Mitchelmore, 2009).

2.1.2 Kjennetegn på algebraisk tenkning

Det er viktig å skille mellom algebraisk tenkning og algebraisk symbolisme. Forskere er ikke helt enige om sammenhengen mellom de to. Noen ser på algebraisk symbolisme som en nødvendig del av algebraisk tenkning, mens andre mener at algebraisk symbolisme er et resultat av algebraisk tenkning, eller en måte å uttrykke algebraisk tenkning på (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Zazkis & Liljedahl (2002) fant i sin studie ut at deltagerne aktivt forsøkte å finne en metode for å uttrykke sin generalisering på, men at deres forsøk på å bruke algebraisk symbolisme ofte ikke var tilstrekkelig. De så også at når deltagerne både benyttet algebraisk tenkning og algebraisk symbolisme, var det ikke nødvendigvis noen tydelig sammenheng mellom de to. Med andre ord kan ikke tilstedeværelsen av algebraiske symboler i seg selv anses som en indikator på algebraisk tenkning. Og på samme måte kan en ikke anse fraværet av algebraisk symbolisme som en indikator på at det også må være et fravær av algebraisk tenkning (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Algebraisk tenkning er en spesiell type matematisk refleksjon. Radford (2010) presenterer en liste over tre sammenhengende elementer for å karakterisere særegenheten til algebraisk tenkning. Han presiserer at listen ikke er fullstendig, men representerer noen sentrale karakteristikker for algebraisk tenkning:

1. En grad av ubestemthet som er karakteristisk for grunnleggende algebraiske objekter (som ukjente, variabler og parametere). Det er denne ubestemtheten som gir muligheten av å blant annet bytte ut en variabel med en annen.
2. Ubestemte objekter håndteres analytisk.
3. Symbolismen som benyttes for å symbolisere objektene i algebraiske uttrykk. Disse symbolene kan være bokstaver, men det kan også være andre tegn. Det å benytte bokstaver alene er ikke en indikasjon på at en tenker algebraisk.

Mason (1996) nevner noen kjennetegn som ligger til grunn for det han kaller algebraisk tenkning. Disse er å se likheter og forskjeller, gjøre distinksjoner, repetere, sortere og kategorisere. Han hevder også at generalisering er kjernen i matematikken, og at dersom elever ikke får jobbe med å uttrykke generalitet foregår det ingen matematisk tenkning (Mason, 1996).

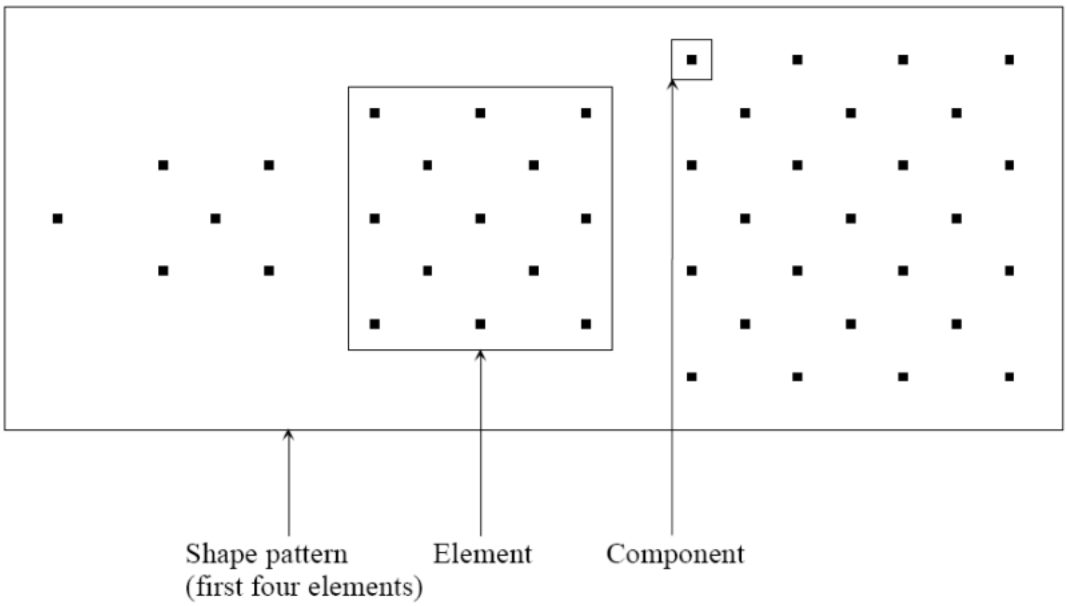
2.2 Figurtall/ figurmønstre og generalisering

Dette delkapittelet vil gi et litt grundigere innblikk i hva figurtall og generalisering er.

2.2.1 Figurtall/ figurmønstre

I litteraturen er det mange ulike begrep som benyttes for å omtale det jeg kaller for figurtall eller figurmønstre (disse to begrepene vil brukes litt om hverandre i denne oppgaven). Bishop (2000) bruker begrepene *number pattern* og *geometric number pattern* og definerer det som en tallrekke der det er en veldefinert regel for hvordan en kan beregne neste tall ut fra forrige tall eller fra posisjonen i sekvensen. Lannin (2005) beskriver typiske *pattern activities* som oppgaver som gir en kontekst og spør elevene om å generalisere en eller flere regler som kan benyttes til å bestemme andre bestemte deler av mønsteret.

Måsøval (2011) bruker begrepet *shape pattern* og beskriver dette som en sekvens av geometriske formasjoner som utvikler seg i et fast mønster og er uendelig langt. Hun bruker begrepene *shape pattern* (figurmønster), *element* (element) og *component* (komponent) om delene av figurmønsteret. Komponentene er hver enkelt blokk som figurtallene er oppbygd av, mens elementene er hver enkeltstående figur. Antall komponenter i et element utgjør tallverdien for dette elementet i rekken av figurtall. De enkeltstående figurene (eller elementene) utgjør sammen figurmønsteret. Sammenhengen har hun illustrert i en figur, se figur 1 (Måsøval, 2011). Jeg har valgt å benytte disse begrepene for oppbyggingen av figurmønstre når jeg skal drøfte resultatene i denne oppgaven.



Figur 1 Hvordan et figurmønster er inndelt i elementer og komponenter

Mulligan og Mitchelmore (2009) sier at stort sett all matematikk er basert på mønstre og struktur. Det sier også Warren (2005) som hevder at matematikkens styrke ligger i sammenhenger og omformuleringer som gir opphav til mønstre og generaliseringer. Abstrakte mønstre er grunnlaget for strukturell kunnskap, og dette er selve målet for læring av matematikk.

2.2.2 Generalisering

Ulike teoretikere kan ha litt ulike definisjoner på begrepet generalisering, men de omhandler i stor grad det samme. En vanlig beskrivelse er den som Mason (1996) bruker. Han sier at matematisk generalisering er en regel eller påstand som stemmer for alle tilfeller av en type matematisk problem (Mason, 1996).

Mason (1996) sier også at generalisering ikke kun er resultatet av matematisk undersøkelse slik mange tror, men at dette er noe som naturlig er til stede hele tiden når man arbeider med matematikk. Dette er også noe som faller mennesker naturlig, da særlig barn er flinke til, og interesserte i, generalisering. For eksempel lærer barn seg enkelt hva en bil er, og klarer da som oftest uten store problemer å overføre dette til å kjenne igjen en bil som en bil, selv om bilene både kan ha ulike farger og ulike fasonger. Barn stiller ofte spørsmål som innebærer hva-hvis og de grubler over alternative realiteter. Dette kan sees på som en naturlig interesse for det generelle (Mason, 1996).

I dag bygger mange undervisningsmetoder på tanken om å trekke oppmerksomheten bort fra det generelle og over på det spesielle. Dette bygger på en feiltolkning av Piagets syn på rollen konkreter har i undervisningen. Barns interesse for det konkrete har da blitt mistolket til at man må få fokuset mest mulig over på det spesielle. Dette kan ofte føre til at generalisering blir vanskeliggjort, og det er i dag omtalt av blant annet Davydov (1990) at dette er en pedagogisk feil (Davydov, 1990; sitert i Mason, 1996).

Radford (1996) sier at generalisering som et didaktisk verktøy ikke unngår problemet med validitet, og at validitet i seg selv er veldig komplekst. Det betyr derimot ikke at generalisering ikke kan være en nyttig inngang til algebra, men at bruk av generalisering krever at vi jobber med dette i undervisningen (Radford, 1996).

Bishop (2000) benytter Dubinsky (1991) sin teori om reflekterende abstraksjon som er en prosess der man konstruerer mentale objekter og mentale prosesser. I følge Dubinsky (1991) er det fem typer reflekterende abstraksjon. Disse er interiosasjon, koordinasjon, innkapsling, generalisering og reversering. Generalisering beskrives i denne sammenheng som noe som skjer når man i en læringsprosess tilpasser et eksisterende skjema til et bredere sett med situasjoner (Dubinsky, 1991; sitert i Bishop, 2000).

Radford (2010) skiller mellom algebraisk generalisering og induksjon. Han hevder at arbeid med figurtall ikke alltid vil lede frem til algebraisk generalisering, og at vi som lærere må være flinke til å skille mellom algebraisk generalisering og andre metoder å behandle det generelle på. Dette kan for eksempel være når elevene ved hjelp av induksjon og gjetting kommer frem til en generell formel, men denne formelen på ingen måte er funnet ved bruk av algebraisk tenkning. Han hevder derfor at vi ofte sier at elevene har generalisert noe, mens de i virkeligheten kun har gjettet seg frem til riktig formel (Radford, 2010).

Radford (2010) sier også at det å generalisere et figurmønster algebraisk avhenger av evnen til å forstå en likhet mellom flere elementer av en sekvens, være klar over at denne likheten gjelder for alle elementer av sekvensen og bruke denne til å konstruere et direkte uttrykk for hvilket som helst element i sekvensen. Det vil altså si at evnen til algebraisk generalisering avhenger av hvorvidt en legger merke til noen felles sammenhenger samt evnen til å overføre disse felles sammenhengene til alle elementene i sekvensen, slik at man kan fortsette sekvensen videre.

Utformingen av figurmønsteroppgavene kan ha en innvirkning på hvilke strategier elevene velger for å generalisere. Både det visuelle bildet av mønsteret i oppgaven og oppgaver der det forrige elementet tydelig kan sees fører til at elevene enklere kan se hvordan figurmønsteret utvikler seg fra element til element. Dette kan igjen føre til bruk av en rekursjonsformelstrategi. Det er likevel ikke sikkert at elevene vil legge merke til den rekursive sammenhengen selv om den i utgangspunktet er tydelig i oppgaven. Visuelle representasjoner kan også være nyttige for å få elevene til å utforme eksplisitte formler, da ofte ved bruk av en tellestrategi. For elevenes valg av generaliseringsstrategier er det avgjørende hvilke sammenhenger og egenskaper de legger merke til ved figurmønsteret. Oppgavenes utforming kan derfor ha en påvirkning for hvilke sammenhenger som er enkle for elevene å oppdage, og som deretter leder dem inn på bruken av en spesiell strategi (Lannin et al., 2006). I følgende delkapittel vil det nå bli gjort rede for ulike generaliseringsstrategier.

2.3 Strategier for generalisering

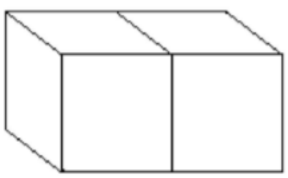
Det er gjort flere studier knyttet til strategier elevene benytter når de skal generalisere uttrykk knyttet til figurtall med lineær vekst. Som analyseverktøy i denne studien har jeg tatt utgangspunkt i Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier og begrunnelser. Før jeg går nærmere inn på de ulike strategiene i rammeverket, vil jeg si litt mer om Lannin (2005) sin studie siden denne danner mitt rammeverk.

2.3.1 Lannin (2005) sin studie

Lannin (2005) studerte generaliseringsstrategiene på både lineære og ikke-lineære figurtallsmønstre til 25 elever i 6. klasse i USA (elevene er da 11-12 år gamle). I tillegg til å generalisere og finne begrunnelser for funnene sine fikk elevene bruke regneark som et verktøy når de jobbet. Lannin oppdaget blant annet at når elevene diskuterte sammen i klassen var de generelt flinke til å begrunne strategiene sine, mens når de arbeidet i mindre grupper manglet disse begrunnelsene i stor grad. Fokuset ble da flyttet over til enkelteksempler i figurtallsmønstrene i stedet for å fokusere på helheten og det generelle (Lannin, 2005).

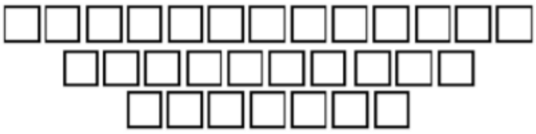
I sin studie benyttet Lannin 4 ulike oppgaver der elevene ble oppfordret til først å jobbe med små deler av problemet, for deretter å forsøke å overføre dette til generelle sammenhenger for oppgavene de jobbet med.

- Den første oppgaven ble kalt *Cube sticker problem* og var en lineær figurtallsoppgave. Se figur 2. Her var konteksten at et selskap produserte rader med kuber og plasserte nøyaktig ett klistremerke på hver side som vender ut på hver kube. De ble så bedt om å finne ut hvor mange klistremerker det var plass til på ulike lenger av slike rader, for deretter å overføre dette til en generell regel. Lannin påpeker at verken en eksplisitt eller en ikke-eksplisitt sammenheng er direkte påpekt i konteksten, noe som gjør oppgaven mer fleksibel i forhold til hvilke strategier elevene benytter.



Figur 2 Cube sticker problem

- Den andre oppgaven kaller han *theater seats problem.* Dette var også et lineært figurtallsmønster der elevene får oppgitt at det i et teater er 6 seter på første rad, og at hver rad bakover inneholder 4 seter mer enn raden foran. De får også se en figur for dette, se figur 3. På samme måte som i *cube sticker problem* blir elevene bedt om å finne antall seter i noen bestemte rader først, før dette skal overføres til en mer generell sammenheng. Lannin påpeker at her er den rekursive (ikke-eksplisitte) sammenhengen direkte referert til i oppgaveteksten, noe han trodde ville hjelpe elever å se sammenhengen mellom en rekursiv og en eksplisitt forklaring.



Figur 3 Theater seats problem

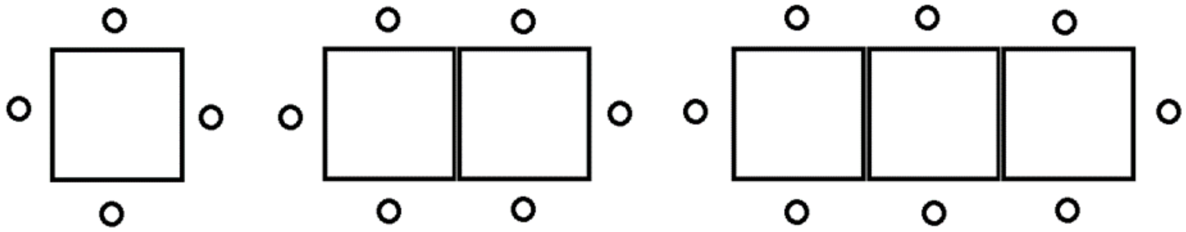
- I den tredje oppgaven, som Lannin har kalt *pizza sharing problem*, skal elevene jobbe med et ikke-lineært tallmønster. I motsetning til de to første oppgavene fikk ikke elevene se noen figur til denne oppgaven. Konteksten var at en pizza selskap solgte store pizzaer som var delt opp i 36 biter hver. Til en skolefest ble det bestilt 2 slike pizzaer, og alle som kom skulle få like mye pizza. Elevene skulle så finne ut hvor mye pizza hver enkelt ville få, avhengig av hvor mange som kom på klassefesten. Lannin sier at det her er lettere å finne en eksplisitt regel enn en rekursiv sammenheng, noe han også antok ville lede elevene mot denne typen generalisering.
- I den siste oppgaven, kalt *phone cost problem*, fikk elevene heller ingen figur tildelt, men i motsetning til *pizza sharing problem* var dette et lineært tallmønster. Elevene fikk oppgitt at et selskap tar betalt 10 cent per minutt for de første 5 minuttene av en telefonsamtale, og deretter 6 cent per følgende minutt. De skulle så finne ut hva telefonsamtaler av ulike lengder kostet. Lannin sier at denne oppgaven gir gode muligheter både for å finne eksplisitte og rekursive regler, men at den rekursive sammenhenger tydelig er oppgitt i oppgaven.

Lannin deler strategiene han fant i studien sin inn i to hovedgrupper. Dette er ikke-eksplisitt (også omtalt som rekursiv) og eksplisitt. Eksplisitte formler isolerer den ukjente variabelen på en side av likhetstegnet, altså kan man ut fra formelen finne svaret for hvilken som helst figur i rekken. Ikke-eksplisitte strategier gjør ikke det, og man er derfor avhengig av å se på forrige figur i rekken for å finne den neste. Av de eksplisitte strategiene har vi hel-objekt strategien (*whole-object*), prøve og feile (*guess-and-check*) og kontekstuell strategi (*contextual*). De ikke-eksplisitte strategiene inkluderer tellestrategien (*counting*) og rekursjonsformelstrategien (*recursive*) (Lannin, 2005). De ulike strategiene er gjort nærmere rede for under.

2.3.2 Hel-objekt strategien

Lannin (2005) beskriver denne strategien som å bruke en del for å konstruere en større del ved multiplisering. For eksempel om oppgaven forteller at 3 epler koster 10 kroner, så vil man kunne se at 9 epler koster 30 kroner ved å multiplisere med 3. Strategien kan også benyttes for å konstruere en mindre del, da ved å bruke divisjon i stedet for multiplikasjon.

Denne strategien vil i en del tilfeller kunne føre til under- eller overtelling dersom elevene ikke gjør nødvendige justeringer underveis (Lannin, 2005). For eksempel i bordoppgaven som elever har jobbet med i datainnsamlingen til denne oppgaven (se figur 4). Her kan det, ved hjelp av hel-objekt strategien, være lett å overtelle. Dersom elevene tenker at i figur 3 er det plass til 8 personer, og da vil det i figur 6 være plass til 2 * 8 = 16 personer. I realiteten vil det være plass til 14 personer på bord 6, så ved bruk av denne strategien kan det være lett å ikke ta hensyn til de aspektene som vil føre til over- eller undertelling.



Figur 4 Bordoppgaven som elevene jobbet med

Hel-objekt strategien er også beskrevet av flere teoretikere, blant annet Stacey (1989) som gir tilsvarende definisjon som Lannin (2005) har i sin studie. Bishop (2000) beskriver også en lignende strategi, men kaller denne for proporsjonalitet-strategien (*apply proportional reasoning*). Han legger også vekt på at det ved bruk av denne strategien er viktig at elevene er bevisste på å analysere figurene riktig for å benytte multiplikasjon og addisjon, og deretter kunne justere svaret på en slik måte at resultatet blir korrekt (Bishop, 2000).

Bishop (2000) gjorde en studie der han brukte 23 elever i alderen 12-15 år. Disse elevene ble valgt fordi de var flinke til å uttrykke hvordan de tenkte, samtidig som det ble antatt at de ikke ville ta skade av å være borte fra undervisningen en kort periode. Elevene jobbet med fire lineære figurmønstre der de ble gitt fire oppgaver knyttet til dem:

- Oppgave 1: fortsett tallmønsteret (finne omkretsen til figurene)
- Oppgave 2: beskrive en regel/ formel for figurmønsteret
- Oppgave 3: avgjøre hvilket av seks kort med ulike uttrykk som representerte omkretsen av figurene de jobbet med

- Oppgave 4: problemet ble snudd, og de ble spurt om å finne hvilket nummer i rekken med figurmønstre som tilhørte en gitt omkrets

Oppgavene de jobbet med ble valgt med blant annet en baktanke om at de ikke skulle være for enkle å benytte proporsjonalitet-strategien på uten å gjøre nødvendige justeringer. Resultatene viste at 22% av studentene prøvde seg på denne strategien, men at den i stor grad ga dem feil svar siden de ikke gjorde de nødvendige justeringene som skulle til (Bishop, 2000).

2.3.3 Prøve og feile strategien

Denne strategien baserer seg på at elevene gjetter seg frem til en formel de tror kan passe til tallmønsteret, uten at de nødvendigvis har noen forklaring på hvorfor de prøver seg på akkurat den formelen. Ofte vil de eksperimentere med ulike regneoperasjoner og tall som de finner i konteksten. De vil så teste ulike tall i formelen sin, og undersøke om de får riktige svar. Så lenge de får riktig svar flere ganger sier de seg gjerne fornøyde. Viser det seg derimot at formelen deres er feil, prøver de en ny formel og undersøker om denne kan stemme (Lannin, 2005).

Prøve og feile strategien er beskrevet av flere teoretikere, blant annet Radford (2006) og Rivera & Becker (2005).

Radford (2006) ga elever i alderen 14-15 år ulike oppgaver med lineære figurmønstre som introduksjon til algebraisk generalisering. De skulle først jobbe med å finne antallet i noen utvalgte figurer senere i figurmønsteret. Det kom her tydelig frem at en av to hovedstrategier som elevene benyttet var å prøve og feile strategien (*trial and error*). De prøvde seg frem med ulike enkle regler og testet gyldigheten deres på noen få tilfeller. Da de fikk spørsmål om å forklare hvordan de kom frem til regelen svarte de at de fant den ved en tilfeldighet. Radford påpeker at slike regler egentlig kun er hypoteser, siden de er utformet kun ved bruk av gjetting og ikke følges av en begrunnelse (Radford, 2006).

Rivera & Becker (2005) påpeker at prøve og feile strategien (*trial and error*) ofte blir ansett som en god problemløsningsstrategi, men at den i mange tilfeller kan føre til feil konklusjoner. De gjennomførte intervju med 42 lærerstudenter som var i sitt siste studieår, der de ble bedt om å gjennomføre en induktiv metode på to algebraoppgaver som involverte figurtall. De trekker frem en student som benyttet prøve og feile strategien som sin strategi, og som fikk problemer fordi han ikke tok hensyn til alle aspektene ved matematikken når han jobbet, men hovedsakelig prøvde seg frem med uttrykk basert på hvordan figurene så ut rent visuelt. For eksempel prøvde han seg frem med 4n-(n+1) som et uttrykk for en figurtallsfølge, og for å forenkle det gjorde han en feil og skrev 4n-n+1, som så ble til 3n+1. Da han testet dette med noen verdier og så at det ble feil, hadde han problemer med å jobbe videre med uttrykket sitt fordi han i utgangspunktet ikke hadde noen gode matematiske forklaringer liggende bak formelen (Rivera & Becker, 2005).

2.3.4 Kontekstuell strategi

Kontekstuell strategi går ut på å konstruere en formel ut fra informasjon som er oppgitt i konteksten, samt relatere denne formelen til en telleteknikk (Lannin, 2005). For eksempel i bordoppgaven (se figur 4 over) kan elevene se sammenhengen med at det er plass til to personer på hvert bord, samt en ekstra på hver ende, og konstruere en formel ut fra denne informasjonen.

Lignende strategier er beskrevet av flere teoretikere, men ofte med andre navn. Stacey (1989) studerte strategiene til elever mellom 9 og 13 år på lineære generaliseringsoppgaver. Elevene ble presentert tre ulike oppgaver, hvorav to av dem var figurtallsmønstre. Den siste oppgaven var kun en enkel tallfølge, uten tilhørende figur. Hun beskriver en metode hun kaller lineærmetode (*linear method*), som går ut på at man bruker informasjonen fra figurmønsteret og bruker både multiplikasjon og addisjon til å konstruere en formel. Denne strategien er altså ikke helt lik kontekstuell strategi som beskrevet av Lannin (2005), men har en del fellestrekk med det at man benytter opplysningene fra oppgaven til å finne frem til en eksplisitt formel.

Radford (2010) skiller ikke like tydelig på strategiene som flere av de andre teoretikerne gjør, men refererer ofte til det han kaller algebraisk generalisering (*algebraic reasoning*) der man konstruerer generelle formler for alle tall. Dette er også et krav for kontekstuell strategi slik Lannin (2005) beskriver den, da den er en eksplisitt strategi. Radford legger også vekt på at generaliseringsprosessene er delt inn i ulike lag, eller nivåer, som sier noe om prosessen kan omtales som direkte algebraisk. Han definerer det å generalisere et mønster algebraisk som evnen til å forstå fellestrekk i noen elementer i mønsteret, forstå at disse fellestrekkene gjelder alle figurene i sekvensen og bruke disse opplysningene til å konstruere en direkte formel for hvilket som helst tall i mønsteret.

2.3.5 Tellestrategien

Tellestrategien går ut på at man tegner eller lager en modell som representerer situasjonen, og teller de ønskede egenskapene ut fra denne. Disse tallene brukes deretter til å forsøke å konstruere en formel (Lannin, 2005). I bordoppgaven (se figur 4 over) kan tellestrategien for eksempel benyttes ved at elevene teller opp antall personer ved hvert bord. De kan også tegne de videre figurene for å telle på flere. Deretter benytter de disse tallene for å konstruere formelen.

Tellestrategier er ofte beskrevet av teoretikere som skriver om generaliseringsprosesser. Blant annet i Stacey (1989) som sier at denne strategien handler om å telle ut fra en tegning. Hun klassifiserer også en strategi der elevene teller opp og bruker gjentatt addisjon for å komme seg videre i rekka som en tellestrategi, selv om denne krever mer forståelse og resonnering i forhold til å kun telle fra en tegning.

Bishop (2000) beskriver både det han kaller å modellere (*model*), der elevene brukte konkreter til å gjenskape figurene og deretter teller opp den egenskapen de var ute etter å finne, og tellestrategiene der elevene teller direkte ut fra figuren i oppgaven de har fått utdelt.

2.3.6 Rekursjonsformelstrategien

Denne strategien går ut på å bygge videre på det forrige elementet i rekken man forsøker å generalisere (Lannin, 2005). I bordkontekstoppgaven (se figur 4 over) vil en rekursjonsformelstrategi kunne være at man vet at antallet personer det er plass til rundt bordet er to flere enn for forrige bord i figurtallsrekka. Det vil si at man blir avhengig av å kjenne til hvor mange det er plass til rundt bordet som kommer før i rekka for å komme videre.

Rivera & Becker (2005) fant at flere av de som forsøkte å generalisere i deres studie klarte å beskrive hvordan figurtallsrekkene utviklet seg og derav hang sammen. De klarte altså å finne utviklingsmønsteret i figurtallsrekkene, men uten å finne noen sammenheng mellom nummeret i sekvensen og antallet i hver figur. De fant altså formler som var avhengige av svaret i figuren foran for å komme videre. Denne strategien kaller de rekursiv induksjon.

Bishop (2000) beskriver en strategi han kaller hoppe-telle-legge til (*skip count/add*) der elevene finner den konstante differansen mellom de ulike figurene i sekvensen, og deretter la til denne differansen for hver figur oppover. De er derfor også her avhengige av å vite antallet i figuren foran i sekvensen for å kunne finne svaret for et gitt nummer. Dette er derfor også å anse som en rekursjonsstrategi, samtidig som det er en del telling involvert som også kan relatere til at den ligner på tellestrategien.

2.3.7 Andre strategier i litteraturen

De fleste strategiene som er beskrevet i litteraturen kan legges under en av Lannin (2005) sine kategorier. Likevel finnes det noen som er omtalt som ikke er like lette å kategorisere innenfor disse, men som er verdt å nevne i denne oppgaven.

Differansestrategien blir beskrevet av Stacey (1989) og er en strategi der elevene antar at antallet i hver figur er proporsjonalt med figurnummeret, og benytter enkel multiplikasjon for å finne svaret for figurer lenger ute i sekvensen. Denne kan på mange måter sees i sammenheng med hel-objekt strategien, men et viktig skille her er at ved bruk av differansestrategien benytter elevene andre tenkemåter. Differansestrategien gjør bruk av gjentatt addisjon, der de alltid multipliserer nummeret i rekken med antallet de mener det øker med for hver figur. Ved hel-objekt strategien vil de derimot kunne tenke noe større og se flere sammenhenger i figurene de arbeider med, noe som igjen kan gi større sannsynlighet for at de klarer å justere formlene riktig i forhold til figurene (Stacey, 1989). Bishop (2000) beskriver også denne strategien, men har gitt den navnet multiplisere (*multiply*).

Stacey (1989) beskriver også at de fleste elevene kombinerer flere strategier når de jobber med generalisering, og i hennes studie viser resultatene at 64% av deltakerne gjorde nettopp det, mens kun et fåtall forholdt seg til en og samme strategi gjennom hele prosessen. Det vanligste var at elevene benyttet en strategi på deler av prosessen, men senere byttet til en annen strategi for å komme videre på en annen del av oppgaven.

Mason (1996) har i sin artikkel hovedfokus på generalisering og dens rolle innenfor algebra, men nevner også noen strategier for generalisering av figurmønstre. En av disse er å manipulere figurene for å gjøre telling enklere. Dette kan innebære å dele inn figuren i mindre, mer logiske deler, slik at det blir enklere å se noen sammenhenger.

Bishop (2000) legger også til en ekstra kategori, nemlig annet (*other*). Innunder denne legger han vage angrepsmåter som ikke lar seg kategorisere, svar som «*jeg vet ikke*» og gjetting.

2.4 Analyseredskap

For å analysere dataene har jeg, som nevnt, tatt utgangspunkt i de strategiene som Lannin (2005) presenterer. Disse ble brukt som et utgangspunkt da oppgavene elevene jobbet med ble designet, og som et rammeverk for å ha en oversikt over hva som kunne forventes å få av data. De dataene jeg samlet inn ble sammenlignet med disse for å se om strategiene fra teorien er representative også i denne studien. De aktuelle strategiene har jeg allerede redegjort for i kapittel 2.3(strategier for generalisering), men i tabell 1 følger en sammenfatning av hvilke strategier som en inkludert og kort hva de kjennetegnes av. Øvrig analyseprosess er nærmere gjort rede for både i kapittel 3.5(resultatanalyse) og kapittel 4(datapresentasjon og analyse).

Tabell 1 - Strategier elevene kan benytte i generaliseringsprosessen

Strategi	**Forklaring/ kjennetegn**
Ikke-eksplisitte strategier	
- Tellestrategien	- Tegner eller lager modeller av situasjonen - Teller de ønskede egenskapene ut fra denne modellen og finner sammenhenger ut fra dette
- Rekursjonsformelstrategien	- Ser på de tidligere figurene i rekka - Bygger videre på disse for å generalisere en formel
Eksplisitte strategier	
- Hel-objekt strategien	- Bruker et element med kjent verdi til å multiplisere eller dividere seg frem til verdien for større eller mindre elementer. - Kan føre til over- eller undertelling.
- Prøve og feile	- Tester formler uten å ha begrunnelse for hvorfor de tror den kan fungere.

	- Eksperimenterer ofte med ulike regneoperasjoner og tall de finner i konteksten/ oppgaven.
- Kontekstuell strategi	- Konstruerer en formel ut fra informasjonen som er oppgitt i oppgaven. - Bruker denne informasjonen i kombinasjon med en telleteknikk.

3. Metode

I dette kapittelet beskrives hovedaspektene ved metodene som er benyttet i prosjektet, samt hvorfor disse metodene er utvalgt som mest hensiktsmessige for denne studien. Kapittelet beskriver også utvalget som er gjort, forskningsdesignet som undersøkelsen er gjennomført etter, beskrivelse av hvordan resultatene er analysert og etiske betraktninger knyttet til studien. I tillegg inneholder det et delkapittel der metoden er gransket med et kritisk blikk for å analysere svakhetene i undersøkelsesprosessen.

3.1 Valg av metode

3.1.1 Generelt om metode

Som et hovedskille innenfor samfunnsforskning skilles det gjerne mellom *kvalitativ* og *kvantitativ* forskningsmetode. Det vil ikke si at det alltid trenger å være et tydelig skille mellom disse metodene, det kan også være grader av hvor kvalitativ eller hvor kvantitativ forskning er. Disse to metodene kan også kombineres. Det er fremdeles noen hovedforskjeller mellom disse tilnærmingene det er verdt å merke seg (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 17). Meget kort forklart kan vi også si at kvantitativ metode avdekker at noe skjer, mens kvalitativ metode avdekker hvorfor noe skjer (Krumsvik, 2014, s. 113).

I kvantitativ forskning benyttes det ofte faste spørreskjema, tester eller lignende. Informantene må gjerne krysse av for gitte alternativer, eller gradere et svar på en poengskala. Svarene som blir gitt skal enkelt kunne tallfestes av forskeren, og det er disse tallene som hovedsakelig vil være grunnlaget for analysen av forskningen. Dette gir også liten fleksibilitet i forskningen, og spørsmålene som stilles må være godt gjennomarbeidet på forhånd da de ikke kan tilpasses underveis. Innenfor slik forskning benyttes ofte et høyt antall informanter, og forskeren treffer kanskje ikke informantene selv (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 17-18).

I kvalitativ forskning er graden av fleksibilitet mye større, og det er gjerne et lavere antall informanter. Kvalitativ forskning baserer seg gjerne på intervjuer, observasjon og interaksjon med informantene. Dette gjøres gjerne av forskeren selv, noe som gir rom for å tilpasse spørsmålene underveis ved behov. Spørsmålene som stilles eller oppgavene som gis er mer åpne enn i kvantitativ forskning, noe som gir rom for individenes subjektive meninger og syn (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 17-18).

3.1.2 Begrunnelse for valg av metode

Med utgangspunkt i forskningsspørsmålene skal denne studien undersøke hvilke strategier elevene benytter når de arbeider med generalisering av figurtall og hva disse strategiene sier om deres algebraiske tenkning. Det kunne vært ulike måter å angripe dette på, men for å avdekke ulike strategier er det nødvendig å ha en grad av kvalitativ analyse involvert. Dersom studien skulle blitt gjort mest mulig kvantitativ kunne en for eksempel sendt ut en tenkt oppgave til mange ulike skoler, bedt lærere gjennomføre oppgaven med elever og deretter fylle ut et spørreskjema der de krysser av for hyppigheten av hvor ofte de ulike strategiene ble benyttet. Dette vil derimot føre til mye uklare skiller i forskningen, og gjøre den lite troverdig. Årsaken er at elevenes strategier ikke alltid lar seg kategorisere like lett, og det er heller ingen garanti for at alle lærere som svarer på spørreskjemaet kategoriserer elevenes strategier på samme måte. Dette vil føre til mye usikkerhet.

Det er derfor tatt et valg om å gjennomføre denne studien med hovedvekt på kvalitativ metode. Det ble valgt ut et lite antall informanter, som alle fikk de samme oppgavene å jobbe med. Forskerens observasjon av denne jobbingen gir rom for å analysere dataene kvalitativt, og dermed avdekke og kategorisere metodene som benyttes. Mer om hvordan dette ble gjennomført i praksis er spesifisert i kapittel 3.2-3.5 (utvalg, forskningsdesign, elevenesoppgave og resultatanalyse).

3.1.3 Kvalitativ metode

Ved kvalitativ forskning tar forskeren utgangspunkt i et allerede etablert verdenssyn eller paradigmer i sin tilnærming. En har derfor med seg et sett antakelser som forskningen vender seg mot når en starter (Postholm, 2010, s. 33). De aktuelle paradigmene for denne studien ble presentert i kapittel 2, teori, og innebærer særlig hvordan algebra introduseres og jobbes med i skolen, samt hvilke strategier elever vanligvis benytter når de jobber med generalisering av figurmønstre.

Postholm (2010, s. 33-35) beskriver at det er tre ulike begreper som beskriver forskerens rolle i den kvalitative forskningen. Disse er *ontologi*, *epistemologi og aksiologi*. Det finnes flere ulike kvalitative tilnærminger til forskning, men disse tre er de som er hyppigst brukt. I tillegg har de et omfang og en varighet som gjør at de kan gjennomføres innenfor tidsrammene og arbeidskravene for en mindre forskningsstudie som denne. Ontologi, epistemologi og aksiologi har igjen flere ulike varianter innunder seg. Disse begrepene er derfor å anse som generelle og filosofiske (Postholm, 2010, s. 33). Jeg vil rette fokus litt mot hver av disse tre begrepene, og fokusere hver av dem mot denne studien.

Ontologi handler om at fokus rettes mot virkeligheten og hvordan denne er. Ontologiske spørsmål dreier seg altså om hva vi vet, og hva vi kan lære ved hjelp av det. Hva som er virkelig og hvordan denne virkeligheten oppfattes vil være forskjellig for alle individer. En kvalitativ forsker vil i henhold til det ontologiske perspektivet verdsette alle disse ulike synene og oppfatningene, og se på hver og en som en del av den sanne virkeligheten (Postholm, 2010, s. 33-34). I denne studien er fokuset på strategiene som hver enkelt elev benytter når de arbeidet med generalisering av figurtall og hva disse strategiene sier om deres algebraiske tenkning. På den måten er det de individuelle virkelighetene som benyttes som datamateriale i studien.

Epistemologi handler om forholdet mellom forsker og informanter (forskningsdeltakere). Som tidligere nevnt er det gjerne forskeren selv som utfører forskningsprosjektet på deltakerne. Dette gjør at det opprettes et samarbeid mellom forsker og informanter. Det er i dette samarbeidet at virkeligheten som forskningen avdekker, konstrueres (Postholm, 2010, s. 34-35). Forskningen i denne studien er det jeg selv som gjennomfører. Mitt forhold til informantene blir derfor sentralt. Betydningen av dette kommer jeg nærmere tilbake til senere, både i kapittel 3.5 (resultatanalyse) og kapittel 3.6 (studiens troverdighet og metodekritikk).

Aksiologi handler om verdier. Alle kvalitative studier er verdiladet. Det er også innforstått at forskerens subjektive meninger og teorier har en innvirkning på forskningen og resultatet av denne. Disse subjektive synene må derfor presenteres i forskningsrapporten slik at de som leser forskningen kan få en forståelse for hvilken innvirkning disse har kunnet ha (Postholm, 2010, s. 35). Jeg vil fortløpende gjennom hele denne oppgaven presentere mine synspunkter og begrunnelser for valg som er tatt. Dette vil også drøftes nærmere i kapittel 3.6 (studiens troverdighet og metodekritikk).

3.1.4 Observasjon som metode

Jeg har nå beskrevet teori og begrunnelse for hvorfor kvalitativ metode er valgt i denne studien. Det er mange måter å gjennomføre kvalitativ forskning på. Oftest brukt er kanskje ulike former for intervju. Det kan være intervju av enkeltpersoner, eller gruppeintervju. Intervjuene kan ha ulik grad av fleksibilitet, avhengig av hva forskningen skal avdekke. Andre kvalitative metoder kan være observasjon, feltarbeid eller dokumentanalyse (Krumsvik, 2014, s. 113-148).

I denne studien er det benyttet observasjon som forskningsmetode. Dette ble sett på som mest hensiktsmessig med tanke på at det var elevenes strategier som skulle studeres. I stedet for å spørre elevene hva de ville gjort i ulike settinger, eller intervjue lærere rundt deres observasjoner om hvilke strategier elever benytter i denne typen oppgaver, vil forskningsresultatene nå vise direkte til hva elevene faktisk gjorde i praksis på de gitte oppgavene.

Krumsvik (2014, s. 142) bruker Kunnskapssenteret (2009) sin definisjon av observasjon som metode: *«systematisk overvåkning av adferd eller tale i naturlige situasjoner. Deltakende observasjon er observasjon hvor forskeren også har en rolle eller part i situasjonen i tillegg til å observere.»*

Ved deltakende observasjon har altså forskeren en rolle i aktiviteten som gjennomføres. Dette kan være både nyttig og nødvendig, og kanskje må grad av deltakelse sees an underveis i observasjonsprosessen. Det er ulike grader av deltakende observasjon. Forskeren kan være fullverdig deltaker (oppfører seg som en del av informantene, observatørrollen er skjult), deltaker som observatør (informantene er kjent med observatørrollen, men denne rollen er underordnet deltakerrollen), observatør som deltaker (deltakelse er sekundært i forhold til observatørrollen) eller fullverdig observatør (forskeren er skjult for informantene og har ingen interaksjon med dem) (Krumsvik, 2014, s. 143).

I observasjonene i denne studien opptrådte jeg som en observatør som deltaker. Min deltakelse var altså sekundær i forhold til min observatørrolle, men jeg både svarte på spørsmål som elevene stilte underveis og veiledet elevene ved hjelp av tilleggsspørsmål om de sto fast. Jeg benyttet også muligheten innimellom til å spørre elevene mer om det var noe de gjorde som ble uklart for meg. Elever vil ofte støtte seg til de voksne som er til stede når de arbeider med oppgaver, både for å søke hjelp og få bekreftelse. For undersøkelsens del er det ingen hensikt at elevene setter seg fast i oppgaven og ikke kommer videre. Dette vil gi et dårlig datamateriale som grunnlag i analysen. I en læringsprosess er det også sentralt at læreren er tilstede som en veileder og støtte for elevene. Det er derfor en nødvendighet å delta i noen sammenhenger, men det var ikke ønskelig at det skulle skje i utstrakt stor grad, da elevenes egne strategier ikke skulle undergraves av at min deltakelse var så stor at den ledet de mot enkelte strategier. Rollen jeg vil ha går derfor under kategorien *observatør som deltaker.* Hvilke interaksjoner som ble nødvendige og hvordan disse kan ha påvirket resultatet vil drøftes sammen med resultatene i diskusjonskapittelet.

Når en skal observere kan det også være nyttig å ha en observasjonsprotokoll. Denne vil være en forberedelse og støtte i hva man skal observere og hvordan (Krumsvik, 2014, s. 143). Krumsvik (2014, s. 143) siterer også Sharan Merriam (1998) sine seks strategier som gjelder observasjon. Disse er:

- Den fysiske settingen (hvor finner observasjonen sted, i hvilken setting og hvilke typer atferd er settingen ment for?)
- Deltagerne (hvem er med, hvor mange, hvilke roller har de, hvorfor er de med)
- Aktiviteter og interaksjoner (hva er det som foregår, hvordan håndterer deltagerne det og hvilke sosiale mønster utspiller seg?)
- Samtale (hva snakker de om, hvem snakker med hverandre, hvem lytter?)
- Spissfindige faktorer (alt annet. Ikke verbal kommunikasjon, symbolbruk, kroppsspråk osv…)
- Din egen rolle (hvor stor grad av deltakelse har du som forsker, hva gjør du?)

Ved utforming av observasjonsprotokollen hadde jeg fokus på disse aspektene. Dette dannet en fin støtte for å få et best mulig datamateriale å jobbe videre med.

3.2 Utvalg

Basert på at min erfaring i skolen hovedsakelig er fra ungdomsskolen og videregående skole, samt at det er på dette nivået eller høyere jeg ser for meg å arbeide i fremtiden var det naturlig å velge å gjennomføre undersøkelsen her. Det blir også naturlig med tanke på at algebra er et ganske krevende tema å arbeide med. For at resultatene skulle være brukbare i forskningen var det derfor viktig at elevene satt med en del matematiske verktøy som gjorde dem i stand til å jobbe med oppgaven og beherske den.

I innledningen refererte jeg til noen kompetansemål som var relevante for temaet figurtall (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Disse sier blant annet at elevene skal være i stand til å generalisere mønstre algebraisk allerede etter 8. trinn. For å være mest mulig sikker på at elevene var i stand til å beherske oppgaven ble det derfor bestemt å utføre oppgaven på trinnet over, altså 9. trinn.

Utvalget av informanter ble gjennomført gjennom bekvemmelighetsutvelgelse. Det vil si at forskeren gjør det som er enklest og mest bekvemmelig. Selv om denne strategien er hyppig benyttet, er den også den minst ønskede. Ofte er et argument at siden antall informanter likevel er så lite, kan vi ikke generalisere resultatene av studien, og utvelgelsen av informanter er derfor uviktig (Johannessen et al., 2010). I min studie var valget av informanter først og fremst avhengig av hvilken skole som ønsket å stille opp, hvilke elever som fikk informert samtykke fra foreldre/ foresatte, samt hvilke elever som selv samtykket i å ta del i studien.

Siden studien skulle gjennomføres med 2 grupper på 3-4 elever per gruppe ble det igjen gjort et utvalg blant disse. Dette fikk jeg lærerne som kjente elevene til å gjøre. Det ble da sammensatt grupper der elevene ville fungere bra sammen når de skulle samarbeide. Både gruppe 1 og gruppe 2 ble bestående av 3 elever.

3.3 Forskningsdesign

Et forskningsdesign sier noe om hvordan forskningen skal utføres og gjennomføres i praksis (Krumsvik, 2014, s. 17). Det skal beskrive hvordan problemstillingen og forskningsspørsmålene skal besvares. Designet bør være presist og dekke hele prosessen fra planlegging av datainnsamlingen til konklusjonen på prosjektet (Sander, 2020).

Kort oppsummert er dette en kvalitativ studie med observasjon som hovedmetode. Undersøkelsen er gjort på to grupper elever med 3 elever per gruppe. De to gruppene gjennomfører ikke oppgaven på samme tidspunkt, men rett etter hverandre slik at elevene ikke får mulighet til å snakke sammen før den neste gruppa skal gjennomføre oppgaven. Dette gir også større mulighet for å observere detaljer i forhold til hva det ville gjort om begge gruppene skulle blitt observert samtidig.

I forkant av undersøkelsen ble det søkt og innvilget tillatelse hos NSD (Norsk senter for forskningsdata). Det ble også utstedt et samtykkeskjema til elevenes foresatte, se vedlegg 1.

Elevene ble gitt to oppgaver som har som mål å komme frem til et generelt algebraisk uttrykk som representerer figurtallet. Disse oppgavene er vedlagt i sin helhet i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse) og også utarbeidet bredere i kapittel 3.4(elevenes oppgave). Underveis i gjennomførelsen var det ønskelig at elevene skulle arbeide mest mulig selvstendig med støtte i hverandre, uten for mye innblanding fra meg. Det er likevel nødvendig å kunne være en støtte dersom elevene har behov for det for å komme seg videre med oppgaven, som jeg drøftet nærmere i kapittel 3.1.4(observasjon som metode). Det enten i form av å være bekreftende eller oppmuntrende til at de skulle fortsette sitt videre arbeid, eller stille spørsmål som oppfordret dem til å prøve videre.

I tillegg til observasjon og skriving av observasjonslogg ble det også gjort videoopptak av elevens prosess. Disse opptakene ble gjennomgått i etterkant, og observasjonsloggen ble da supplert med mer detaljer om hvordan elevene arbeidet med oppgaven. Elevenes skriftlige arbeider ble også innsamlet og benyttet som en støtte i resultatanalysen.

3.4 Elevenes oppgave

Da oppgavene skulle utformes var hensikten at de skulle være *utfordrende*, men *overkommelige.* Om elevene mistet motet med en gang og ikke kom noen vei med oppgaven, eller ville trenge alt for mye hjelp, ville ikke resultatene være reliable nok til å benyttes i studien (se kap. 3.6).

Utgangspunktet for oppgaven var ulike figurtall med lineær vekst. Jeg har utformet oppgavene selv, men de er lagt tett opp mot Lannin (2005) sin måte å bygge opp oppgaver på. Kinoseter-oppgaven som benyttes i denne studien ligner blant annet veldig på *Lannin’s theatre seats problem* (men har et annet mønster). Delspørsmålene i mine oppgaver er også bygget opp på tilsvarende måte som Lannin har gjort i sine oppgaver.

Oppgavene omhandlet elevens vei mot en generell formel for de ulike figurtallene. For å hjelpe dem i gang ble det ansett som nødvendig å starte med noen spørsmål. Spørsmålene ble forsøkt formulert så åpne som mulig, slik at de i liten grad skulle påvirke hvilken strategi elevene benyttet for å komme frem til en formel til slutt.

Oppgavene besto av to ulike figurtall med sine tilhørende spørsmål. Begge oppgavene i sin helhet finnes i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse).

3.5 Resultatanalyse

Når resultater fra kvalitative studier skal analyseres er det nødvendig å redusere datamaterialet slik at det blir mer oversiktlig. Som et hovedskille kan det skilles mellom deskriptiv og teoretisk analyse. Deskriptiv analyse er delen av analyseprosessen som inneholder koding og kategorisering. Dette reduserer datamaterialet til et nivå der det er mulig å benytte resultatene i videre analyser. Teoretisk analyse er når teoriene forskeren har tilegnet seg brukes sammen med dennes erfaringer og opplevelser for å analysere datamaterialet. Som tidligere nevnt er forskerens subjektive oppfatning en stor del av kvalitativ metode, og dette gjelder også i analyse av resultatene. Det er likevel et mål at forskeren skal møte datamaterialet med et mest mulig åpent sinn i analyseprosessen (Postholm, 2010, s. 86-99).

For å begrense datamaterialet ble det som en del av den deskriptive analyseprosessen benyttet kategorisering ut fra analyseredskapet som ble presentert i kapittel 2.5. De ulike delene av datamaterialet ble sammenlignet og plassert inn i kategoriene i analyseredskapet etter nøye gjennomgang.

For å systematisere og kategorisere dataene i denne studien ble det først foretatt en transkribering av videoopptakene. Disse transkripsjonene ble sammen med mine egne notater og elevenes skriftlige arbeid utgangspunktet for videre analyse. For å kunne kategorisere elevenes strategier, ble det først gjort en generell identifisering av datamaterialet der alle strategier som ledet dem mot det generelle ble markert. Deretter ble disse strategiene sammenliknet med hverandre og med det teoretiske rammeverket (se kapittel 2.5, analyseredskap) for å identifisere de ulike kategoriene som forekom.

I etterkant av kategoriseringen er også resultatene diskutert videre ved bruk av teoretisk analyse for å kunne se helheten i resultatene som forskningen har avdekket. Denne tolkningen skjer underveis i en skriveprosess der forskerens mening og forforståelse tolkes i samarbeid med de innhentede dataene. Disse dataene kan i sin tur påvirke forskerens subjektive meninger, noe som igjen gir innvirkning på den videre tolkningen. Slik vil tolkningen av resultatene alltid påvirkes av forskerens subjektive meninger, og motsatt. Denne spiralen kalles den hermeneutiske spiralen (Postholm, 2010).

3.6 Studiens troverdighet og metodekritikk

Innenfor all forskning er det viktig å se på hvor pålitelige dataene i studien er. Dette kalles *reliabilitet* som betyr pålitelighet. Hvor reliabel forskningen er kommer an på hvor nøyaktige dataene er, hvilke data som brukes, hvordan de samles inn og hvordan de analyseres (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 23). Det normale er at reliabilitet måles ut fra i hvor stor grad resultatene fra forskningen kan reproduseres og gjentas. Innenfor kvalitativ forskning er dette derimot ofte utfordrende siden den bestemte situasjonen forskningen befinner seg i, samt forskerens rolle er unik i hvert enkelt tilfelle. Det er derfor ofte mer relevant å se på helheten av forskningen og knytte den mot andre studier, altså å se på om lignende undersøkelser er relativt stabile på tvers av ulike forskere og metoder (Postholm, 2010, s. 169).

Siden dette er en kvalitativ studie er det vanskelig å reprodusere resultatene nøyaktig, men det er muligheter for å benytte de samme oppgavene på en tilnærmet lik elevgruppe for å sammenligne resultatene. Resultatene fra studien er også godt sammenlignbare med tidligere forskning (som er beskrevet i teorikapittelet). Særlig er det tydelig at de ulike strategiene som elevene benytter er mulig å kategorisere innenfor de strategiene som er beskrevet i tidligere forskning. Selv om denne studien tar utgangspunkt i Lannin (2005) som analyseredskap, går de ulike strategiene som beskrives også i stor grad igjen i annen teori.

Validitet handler om hvorvidt undersøkelsen undersøker det den er ment å undersøke (Postholm, 2010, s. 170) og hvor godt disse dataene representerer fenomenet som undersøkes. Validitet betyr gyldighet. Det er ikke alltid like enkelt å vurdere studiens validitet, og det kan heller ikke sies at en studie enten er valid eller ikke. Dette vil være et kvalitetskrav som er mer eller mindre oppfylt, men ikke noe absolutt (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 24). For å vurdere validiteten er det ofte snakk om å bruke sunn fornuft og se på helheten av undersøkelsen (Postholm, 2010, s. 170).

Det er fullt mulig å identifisere dataene som er relevante for det denne studien skal undersøke, så resultatene må derfor kunne sies å ha en god grad av validitet. Det er likevel noen svakheter ved alle studier, og særlig ved en liten studie som denne. For det første så er det mye som påvirker elevenes strategier. Det var i enkelte tilfeller tydelig at elevene hadde lært seg noen strategier gjennom undervisningen på skolen (regler), som de i en del tilfeller velger å benytte. Disse kan derfor ikke sies å være deres egne strategier. Det ble også tydelig at oppgavens form og oppbygging påvirket hvordan elevene angrep oppgaven, og derav hvilke strategier de benyttet. Dette er nærmere diskutert i kapittel 5, diskusjon.

Det ville vært en fordel å gjennomføre undersøkelsen på et tidspunkt der elevene ikke hadde jobbet med tematikken på en stund. Dette kunne vært undersøkt på forhånd, slik at datainnsamlingen ble lagt til et annet tidspunkt. Det er likevel trolig at en del elever har med seg innlærte strategier fra matematikkundervisningen uansett.

Jeg kjente til elevene fra før, da jeg har vært litt på skolen og undervist. Jeg var derfor ganske bevisst på at jeg ikke skulle velge ut informantene og dele dem inn i grupper selv. Likevel kan mitt forhold til elevene ha hatt en innvirkning. De ble også litt påvirket av å bli filmet underveis. Likevel virket det som elevene slappet av mer etter hvert som tiden gikk, og de turte også å prøve seg mer frem på en fri måte når de ikke var redde for at det ville påvirke karakteren deres i matematikk.

3.7 Etiske betraktninger

De nasjonale forskningsetiske komiteene har vedtatt en del forskningsetiske retningslinjer som gjelder for samfunnsvitenskapelig forskning. Disse retningslinjene er rådgivende og veiledende, og hensikten er å være en hjelp til å avklare forskningsetiske dilemma samt fremme god vitenskapelig praksis (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2018).

Johannessen et al. (2016) sier at disse retningslinjene kan sammenfattes i tre typer hensyn man må være særlig oppmerksom på som forsker. Disse er:

- Retten til selvbestemmelse og autonomi
- Respekt for privatliv
- Å unngå skade

Retten til selvbestemmelse og autonomi handler om at deltakerne i studien skal ha rett til selv å bestemme over sin deltakelse. De skal være tilstrekkelig informert om prosjektet når de samtykker til å delta, og skal på et hvilket som helst tidspunkt kunne trekke sitt samtykke til å delta (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 41). Alle deltakerne i denne undersøkelsen har fått et skriftlig brev med informasjon om studiet der foresatte har måtte signere skriftlig for å godta at deres barn var deltakere. Dette brevet ligger som vedlegg 1. Det har også vært viktig at elevene selv ser positivt på å delta, derfor har alle deltakere i denne studien fått rett til å selv bestemme over sin deltakelse selv om foresatte har gitt sin godkjenning.

Respekt for privatliv handler om at informasjonen som innhentes og som kommer frem ila undersøkelsen skal håndteres på en slik måte at enkeltpersoner ikke kan gjenkjennes. Dette er også noe deltakerne skal være trygge på når de deltar (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 41-42.) I denne studien er det ikke veldig sensitive personopplysninger som håndteres. Det innhentes ikke annen informasjon om deltakerne på forhånd enn deres navn, alder og skoletilhørighet. Derimot vil deres deltakelse på oppgaven kunne si noe om nivået de faglig ligger på i matematikk. Med en gang datainnsamlingen var gjennomført ble deltagernes navn erstattet med «elev x» når dataene ble videre analysert. Så raskt forskningen var avsluttet ble alle videoopptak slettet, og de informerte samtykkene som inneholdt navn på deltakere og foresatte ble makulert.

Å unngå skade handler om at deltagerne skal utsettes for minst mulig belastning. Dette punktet er mest viktig innenfor medisinsk forskning, men det er også viktig å ha det i bakhodet innenfor samfunnsvitenskapelig forskning. Det handler blant annet om at deltagerne ikke skal oppleve sin deltakelse som belastende (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 42). Det viktigste hensynet som ble tatt i denne undersøkelsen i forhold til å unngå skade var nok at kun elevene som selv var positive til å delta i studien ble bedt om å delta. Det gjorde at ingen ble tvunget til å gjennomføre noe de opplevde som ubehagelig, og sikret forhåpentligvis at de som deltok fikk en positiv opplevelse av det.

I følge personopplysningsloven har man meldeplikt på et prosjekt dersom personopplysninger skal behandles og dersom disse opplysningene lagres elektronisk (Personopplysningsloven, 2018). Dette prosjektet ble meldt inn til Norsk senter for forskningsdata (NSD) våren 2021, og fikk godkjennelse for innhenting av data i juni 2021.

4. Datapresentasjon og analyse

I dette kapittelet vil jeg gjennomgå arbeidsøktene med elevene og gjøre en analyse av elevenes strategier ved hjelp av det teoretiske rammeverket som er presentert i kapittel 2, teori. Denne analysen vil danne grunnlaget for diskusjonen som kommer i kapittel 5.

Jeg har valgt å dele opp dette kapittelet i to deler, slik at de to oppgavene analyseres hver for seg. Det kom tydelig frem en del forskjeller i generaliseringsstrategiene på de to oppgavene, og elevene angrep dem veldig ulikt. Samtidig viser det seg også at elevene jobbet seg gjennom flere strategier sammenhengende for å komme frem til en generell formel. Ved å analysere oppgavene hver for seg vil det gi et bedre inntrykk av hvordan elevene jobbet seg gjennom en oppgave fra start til slutt. Disse forskjellene vil også diskuteres nærmere i neste kapittel.

Som nevnt i metodekapittelet ble det innhentet datamateriale fra økter med til sammen 6 elever på 9. trinn. Elevene ble delt i to grupper, og hver gruppe gjennomførte to økter på 45 minutter med en figurtalloppgave i hver økt. Øktene ble kjørt med en ukes mellomrom.

I datapresentasjonen og analysen, og også videre i diskusjonen, har jeg omtalt elevene med nummer for å anonymisere dem. Gruppe 1 besto av elev 1, elev 2 og elev 3, mens gruppe 2 besto av elev 4, elev 5 og elev 6.

Dataene er også presentert med linjenummer for å tydeliggjøre omtrent hvor langt inn i prosessen med oppgaven de er kommet når de er innom de ulike strategiene. Linjenummeret er sammensatt med en bokstav for å vise fra hvilken gruppe og oppgave dataene er hentet:

- a: gruppe 1, bordkonteksten
- b: gruppe 2, bordkonteksten
- c: gruppe 1, kinoseteroppgaven
- d: gruppe 2, kinoseteroppgaven

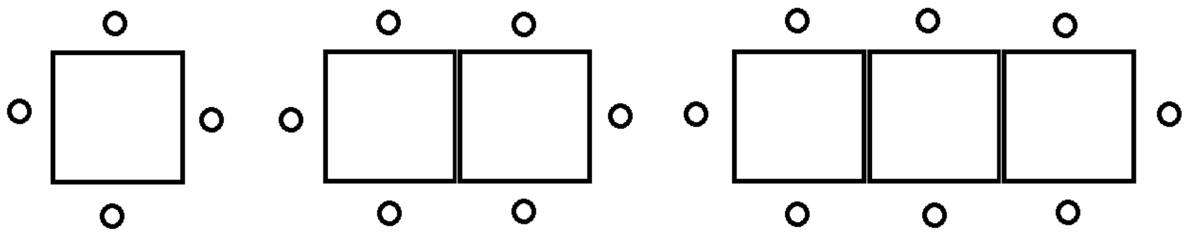
Det teoretiske rammeverket (se kapittel 2.5 analyseredskap) beskriver til sammen fem ulike strategier som elever benytter når de skal generalisere uttrykk for figurtall. Disse strategiene er tellestrategien, rekursjonsformelstrategien, hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi. I denne delen vil datamaterialet gjennomgås for å se hvilke av disse strategiene som kan identifiseres i dataene. Gruppene vekslet mellom flere strategier underveis i arbeidet. Det blir først redegjort for forekomsten av hver enkelt strategi i oppgave 1, og deretter lignende for oppgave 2.

4.1 Oppgave 1 – bordoppstilling

Oppgaven elevene fikk utdelt følger under:

Bordoppstilling

Klassen skal arrangere familiekveld på skolen. I den forbindelse skal det settes opp langbord i gymsalen. Bordene som benyttes er kvadratiske, og det er plass til en person på hver side. Figuren viser de første mulighetene for å sette sammen bord:



a) Hvor mange personer er det plass til rundt langbordet når det er 1-10 bord plassert sammen? Forklar hvordan dere fant disse tallene.
b) Hvor mange hadde det vært plass til om 20 bord ble plassert sammen? Hva med 50? Hvordan fant dere disse tallene?
c) Hvor mange bord må dere sette sammen for å få plass til 100 personer? Forklar hvordan dere kommer frem til det.
d) Kan dere finne en metode for å finne ut hvor mange personer det er plass til rundt langbordet uansett hvor mange bord som er satt sammen? Skriv en formel som kan brukes.

Det ble ikke funnet bruk av tellestrategien i denne oppgaven. Denne strategien er derfor ikke inkludert i datapresentasjonen for denne oppgaven.

4.1.1 Rekursjonsformelstrategien

Begge gruppene startet med rekursjonsformelstrategien på denne oppgaven. Ingen av de brukte den videre, eller kom helt frem til en generell formel ved å bruke denne.

Eksempelvis startet gruppe 2 slik på den første oppgaven:

1b Elev 6: vi kan jo starte med, hvilket mønster er det? Hvor mye blir det lagt til for hvert bord?
2b Elev 4: legger til 2 personer for hvert bord
3b Elev 6: mhm
4b Elev 4: starter med 4, plusser på 2 for hvert ekstra bord
5b Elev 5: det blir jo 4-6-8 også 10-12 osv bortover
6b Elev 6: så svaret vårt er?
7b Elev 5: jo, for det blir jo bare plusset på 2 og 2 hver gang
8b Elev 6: vi skriver ned tallene fra 1-10 bord da. 4-6-8-10-12-14-16-18-20-22. Er det riktig?
9b Elev 5: ja

Analyse: Selv om dette tydelig er en rekursjonsformelstrategi, der elevene ser på hvordan mønsteret forandrer seg fra et element til det neste i rekken, kan det ikke utelukkes at det også er en grad av tellestrategi involvert. Det kommer ikke frem ut fra elevenes dialoger hvordan de er kommet frem til hvor mange komponenter det er i hvert element i figurmønsteret, men det er nærliggende å tro at de raskt måtte telle komponentene for å kunne se denne sammenhengen. Fokuset deres ligger likevel ikke på tellingen, men på hvordan mønsteret utviklet seg fra element til element. Denne sammenhengen skriver de ned for å kunne besvare hvor mange personer det var plass til rundt 1-10 bord. Ut fra denne måten å arbeide på kan de finne antall komponenter i hvilket som helst element i figurmønsteret, men de er avhengige av å kjenne til antall komponenter i elementet foran i rekka, eller telle seg opp via 2-gangen helt fra begynnelsen på figurmønsteret. De leter ikke etter en generell formel her, men finner likevel en generell sammenheng som gjelder for figurmønsteret.

Gruppe 1 gikk noe grundigere til verks for å prøve å se formelen med en gang, men lyktes ikke ved bruk av denne strategien:

*1a Elev 3: det blir jo plusset på med to *peker på figurene**

*2a Elev 2: ja, det blir noe sånn der x+3, blir det ikke det? Nei, f+3. Starter med 1, 2 *peker på hvordan antall bord øker på figurene**

*3a Elev 1: fellesnevneren er 3 *peker på de tre plassene på enden av bordene**

4a Elev 3: men, blir det ikke noe med 4? 4+…

*5a Elev 1: Det er jo to inni her hele tida da *peker på bordet i midten på figur 3* Også er det tre på hver side*

6a Elev 2: ja, det blir jo to flere hver gang

7a Elev 1: så blir det ikke… blir det ikke 2f+3? Fordi konstantleddet er 3. Eller 2x da.

*8a Elev 3: Det er jo både 3 der og 3 der da *peker på endene av figurene**

9a Elev 2: jeg husker ikke helt hvordan jeg skal gjøre dette jeg…

Analyse: I motsetning til gruppe 2, gikk gruppe 1 enda et steg videre ved bruk av rekursjonsformelstrategien. De startet med å påpeke hvordan mønsteret utviklet seg fra et element til det neste, altså at det øker med to for hver gang. De benytter så dette mønsteret de har gjort seg kjent med til å forsøke å lage en generell formel med en ukjent variabel, x. I tillegg til å se på hvordan mønsteret utvikler seg og benytte dette i formelen, leter de også etter andre kjennetegn ved figurmønsteret som de kan benytte for å konstruere en formel. For eksempel er de innom tallet 3 (som de kaller «fellesnevneren» på enden av bordene) og tallet 4 (som er antall personer rundt 1 bord). Dette kan også kategoriseres under kontekstuell strategi, der de finner informasjon som er oppgitt i oppgaven (eller som de klarer å finne i det oppgitte figurmønsteret) til å konstruere en formel. Formlene de prøver seg på her er ikke rekursive, men de har likevel startet med en rekursiv tankegang for å forsøke å konstruere dem.

4.1.2 Hel-objekt strategien

Gruppe 2 gikk direkte over på å benytte hel-objekt strategien når de skulle finne ut hvor mange det var plass til rundt 20 og 50 bord. De benyttet da tallene de hadde fått for 1-10 bord til å multiplisere eller addere seg opp til et større antall bord.

15b Elev 6: 20 bord?

16b Elev 4: 22+20

17b Elev 6: 42?

18b Elev 4: ja

19b Elev 6: er det plass til 42 personer på 20 bord? Hva med 50 da?

20b Elev 4: da blir det, ehm… går det an å ta 20 ganger 5 pluss 2.

21b Elev 6: 20 ganger fem pluss 2?

22b Elev 5: vi har jo 2 da

23b Elev 6: ja

24b Forsker: hvorfor 20 ganger 5?

25b Elev 4: for på bord 10 er det 20. Så på bord 50 blir det 20 ganger 5 pluss de på endene.

Analyse: Her jobber elev 4 med de tidligere svarene deres for å finne ut hvor mange det er plass til rundt 20 og 50 bord. Eleven benytter antall personer rundt 10 bord som referanse (22 personer), men gjør helt fra begynnelsen en helt korrekt justering for å unngå over- eller undertelling ved å se bort fra de som sitter på endene når antall bord multipliseres og divideres. For å ende med riktig svar til slutt blir disse lagt til på slutten. De fortsetter med samme strategi for å finne ut hvor mange de må sette sammen for å få plass til 100 personer.

26b Elev 6: 100 personer. Det blir jo 50 bord det da. Var det ikke det da?

27b Elev 4: njaaa

28b Elev 6: var ikke 50 bord 102 personer da?

29b Elev 4: jo, så hvis du fjerner ett bord så blir det akkurat. For et bord er 2 personer, så hvis vi tar minus ett bord så blir det minus 2 personer. Så da blir det akkurat 100. Da blir det 49 bord.

Da denne sammenhengen ble løst såpass enkelt fikk de også en ekstra utfordring med å finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 150 personer.

31b Forsker: hva hvis det hadde vært 150 personer da?

*32b *elevene grubler en stund hver for seg**

33b Elev 4: 74

34b Forsker: 74?

35b Elev 4: ja

36b Forsker: hvordan fant du ut det?

37b Elev 4: 50 er 100, så 100 delt på 2 er 50. Også på 50 personer må det være 25 bord minus ett bord for det er plass til en på hver side. Så da blir det 74.

38b Elev 6: 74 fordi halvparten av 49 er 24?

39b Elev 4: ehm, nei. Jeg tok 50. Fordi for å få 100 personer så er det 50 bord.
40b Elev 6: 100 personer er det 49 bord!
*41b Elev 4: ja, men hvis du ikke tar med dem i starten *peker på de på endene*. Ikke plusser på dem to. Så da er det 100 på 50 bord. Også for å få 50 personer så må det være 25. Også minus ett bord så blir det 74.*
42b Forsker: hvorfor tenker du minus ett bord?
*43b Elev 4: fordi det er to personer. Også for å få helt nøyaktig så bare, ja *peker på de to ytterste på bordene på figuren*. Vi bare fjerner de først, også legger dem til etterpå.*
44b Forsker: så du tenker på det som at ingen sitter på endene, men at de sitter på et ekstra bord?
45b Elev 4: ja, på en måte

Analyse: igjen benytter elev 4 en hel-objekt strategi, med korrekte justeringer for å unngå over- og undertelling. Her benyttes også en kombinasjon av flere regnearter for å kunne justere seg frem til riktig svar til slutt. Elev 4 gjør også en justering der de to personene som sitter på endene blir sett på som et ekstra bord som er med i multiplisering og divideringsprosessene, men som blir trukket fra på slutten for å få riktig svar.

I gruppe 1 var det ikke like utpreget bruk av denne strategien, men de brukte den på tilsvarende måte som gruppe 2 for å finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 100 personer.

41a Elev 1: da må vi jo sette sammen 49 da. Vi fikk jo 102 på 50. Da er det jo to mindre.

Analyse: elevene benyttet her et element med kjent verdi som lå veldig nært i rekken, slik at de enkelt kunne justere ved å trekke fra et bord. De benyttet ikke multiplisering eller dividering, men jobbet seg et element nedover i figurmønsteret ved hjelp av subtrahering fordi de hadde et element med kjent verdi like i nærheten i figurmønsteret de jobbet med. Dette kan også sees på som en rekursjonsformelstrategi, der de kun jobber seg et element nedover ut fra at de er kjent med hvordan økningen mellom elementene er.

4.1.3 Prøve og feile strategien

På denne oppgaven var det lite bruk av prøve og feile strategien. Gruppe 1 benyttet denne litt da de fikk spørsmålet om hvor mange bord de trengte for å få plass til 150 personer. De hadde allerede funnet formelen 2x+2, og prøvde å snu om på denne for å bruke den til å regne ut antall bord. Da de ikke helt husket hvordan de skulle gjøre dette, prøvde de seg frem med å snu den på ulike måter:

43a Forsker: hva hvis dere skulle hatt plass til 150 stk da?
44a Elev 1: da må vi ta 2 ganger 150 pluss 2 er lik
45a Forsker: 150 personer, ikke 150 bord, stemmer det da?
46a Elev 2: da må vi gjøre formelen motsatt da.
47a Elev 1: da må vi ta delt på 2, også minus 2 Så 150 delt på 2?
48a Forsker: kan dere prøve på det da?
49a Elev 1: så 150 delt på 2?
50a Elev 2: 150 delt på 2… minus 2? Eller, nei, det blir kanskje ikke minus 2?
51a Elev 3: blir det ikke pluss 2?
52a Elev 2: kanskje det blir pluss 2?
53a Elev 1: Nei… hvorfor skal det blir pluss 2?
54a Elev 3: hvorfor skal det blir minus 2?
55a Elev 1: jo, fordi, se her. Dere vet når vi løser x så tar vi og flytter over også blir det minustall.
56a Elev 2: ja, så da blir det 150… også minus 2
57a Elev 1: ja, det blir minus 2. Det går ikke an noe annet. 73. Så det blir 71 da.
58a Elev 3: nei, 150 delt på 2 blir 75.
59a Elev 1: åja…
60a Elev 2: da kan vi prøve å gjøre motsatt igjen da. 73 ganger 2 pluss 2, men det blir feil da. Det må være 74. Fordi 73 ganger 2 blir 146. Pluss 2 blir 148.
61a Elev 3: ja...
62a Elev 2: da blir det minus 1 da sikkert
63a Elev 3: vi kan sikkert ikke bare flytte det sånn da
64a Elev 1: da har vi gjort noe feil på det første da
*65a Elev 3: nei, hvis alt er feil, da…. *mister veldig motet for å jobbe videre**
66a Elev 1: skal vi prøve pluss 2 da, bare for å sjekke om jeg tok feil?

Analyse: Elevene prøver seg her frem med ulike vendinger av formelen de allerede har laget. De vet ikke helt hvordan de skal snu på den for at det skal stemme, så de prøver litt ulike ting. Likevel kommer de ikke frem til den riktige metoden, noe som gjør at de mister litt motet. Ut fra at elevene snakker om å «gjøre formelen motsatt» og å «løse x» er det nærliggende å tro at de har lært hvordan de snur på formler og bruker disse tidligere, men ikke husker hvordan de skal gjøre det. Underveis i denne prosessen har de ingen matematiske argumentasjoner, men prøver seg frem med ulike varianter av multiplisering, dividering, subtrahering og addering på leddene i formelen. Det er veldig tydelig at de kun tester ulike varianter av formelen her, uten noen begrunnelse, og dette er derfor å anse som en prøve og feile strategi. Etter å ha testet mye forskjellige videre treffer de tilfeldigvis på riktig vending av formelen, slik at de finner svaret, men her er heller ingen argumentasjon involvert, annet enn at de oppdager at denne formelen fungerer når de tester den.

75a Elev 1: vi må bare ta 150 delt på 2, minus 1.
76a Elev 3: det blir jo rett det da.

4.1.4 Kontekstuell strategi

Begge gruppene benytter kontekstuell strategi for å finne frem til den generelle formelen. De ser på informasjonen de får av oppgaven og av figurene som er avbildet i oppgaven og benytter dette til å konstruere en formel. Dette gjør de etter at de har jobbet seg gjennom en eller flere av de andre deloppgavene, så de har gjort seg godt kjent med mønsteret underveis. Likevel går de tilbake til informasjonen i den originale oppgaveteksten når de skal generalisere en formel, slik gruppe 2 har gjort her:

46b Elev 6: det blir jo x+2 da. X er antall bord også pluss 2 for de i starten.
47b Elev 4: blir det ikke 2x+2?
48b Elev 6: hvorfor blir det 2x+2?
49b Elev 4: for hvert bord er x og på hvert bord er det 2 personer, pluss 2.
50b Elev 6: for hvert bord er det 2 personer?
*51b Elev 4: det er jo det! Også plusser du på 2. Da blir det 2x+2. Da er x lik antall bord. Vi kan jo prøve, vi har jo skrevet opp her *peker på tallene de har skrevet etter oppgave a og b* Vi kan teste, for eksempel 9 bord.*
*52b Elev 5: Ja, det blir det der. Fordi hvis man ser det her nå *peker på figuren*, så er x et bord og da er det to *viser personene på figurene med fingrene* på det bordet, men så plusser du på to til *viser de to på endene med fingrene*. Og etterpå så blir det jo 2 ganger, og da blir det 2 x'er og da blir det 4 også 2. Og da blir jo det rett ikke sant?*

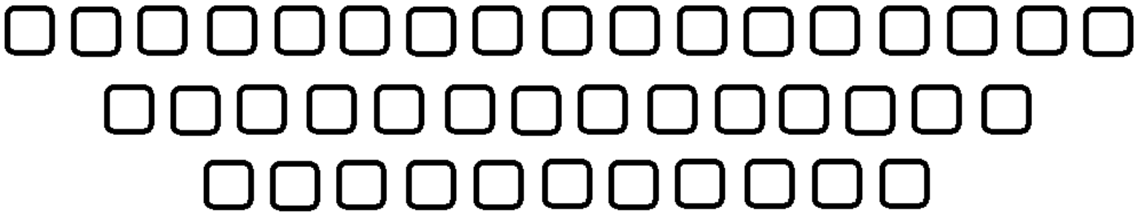
Analyse: Her benytter elevene informasjonen fra oppgaven til å konstruere en formel. Det første forslaget som kommer opp er en formel som gruppe 1 var innom ganske tidlig da de jobbet med rekursjonsformelstrategien, nemlig x+2. Denne forkastes raskt til fordel for den korrekte formelen, 2x+2. Elevenes fokus ligger i dette tilfellet på helheten i elementene og figurmønsteret, og ikke på økningen mellom enkeltelementer i rekken, noe som gjør at strategien er mer lik kontekstuell strategi.

4.2 Oppgave 2 – kinoseter

Følgende oppgave fikk elevene utdelt:

Kinoseter

Det skal bygges en ny, stor kinosal og seteradene settes opp slik at alle skal se best mulig, slik som vist på figuren:



a) Hvor mange seter er det i rad 5 og rad 8? Hvordan fant dere ut det?
b) Hvor mange seter er det i rad 50? Hvordan fant dere ut det?
c) I hvilken rad er det 233 seter? Hvordan fant dere ut det?
d) Kan dere finne en formel som kan brukes til å finne ut hvor mange seter det er i hvilken som helst rad? Forklar hvordan dere kommer frem til formelen.

For oppgave 2 ble det hverken benyttet kontekstuell eller hel-objekt strategi av elevene. Disse er derfor ikke gjort nærmere rede for i denne delen.

4.2.1 Tellestrategien

Begge gruppene startet med tellestrategien for denne oppgaven. Under kommer et eksempel fra da gruppe 1 startet med denne oppgaven:

2c Elev 3: da er det en formel da. Hvor mange det plusses på. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11. Neste er 14. Da er det tre. Så 17. Øker med tre da.

3c Elev 2: ja. Da blir det…?
4c Elev 3: men hvordan blir formelen da? Pluss tre?
5c Elev 2: ehm, det blir jo… Vi starter jo på 11 da. Så…
6c Elev 3: kanskje det blir noe sånn n + 3 + 11 eller noe sånt. For det starter med 11 gjør det ikke det? Starter med en konstant.
7c Elev 2: aaaah, ja…

Her sluttet de å forsøke å komme frem til en formel, og gikk over til å legge til tre for hver nye figur opp til figur 8, som var det oppgaven spurte etter.

Analyse: Elevene starter her med å telle komponentene til hvert element i figurmønsteret. Ut fra tellingen så finner de økningen. Denne økningen (øker med 3 for hver rad) benytter de sammen med de talte komponentene i det første elementet (11 seter i rad 1) til å forsøke å konstruere en formel. Ut fra analyseredskapet innebærer også tellestrategien at elevene tegner eller lager en modell av situasjonen. Selv om de ikke har gjort det i denne situasjonen vil jeg likevel argumentere for at strategien de har benyttet her er tellestrategien, fordi en tegning av figurmønsteret er oppgitt for elevene i oppgaven, og de benytter denne tegningen til å telle egenskapene de ønsker å finne ut av ved figuren. Når de har telt og funnet disse egenskapene, benytter de dem også i en form for rekursjonsformelstrategi, der de er opptatt av funnet de har gjort om at økningen fra en rad til den neste er på 3 ekstra seter.

Gruppe 2 angrep også oppgaven på tilsvarende måte som gruppe 1 har gjort her.

4.2.2 Rekursjonsformelstrategien

Gruppe 1 var så vidt innom rekursjonsformelstrategien innimellom at de prøvde seg frem:

25c Elev 3: men kan det ikke være noe sånt, at det starter med 11 på den første, også nummeret pluss 3 eller noe?
26c Elev 2: det blir ikke riktig fordi… det stemmer på 3'ern, men ikke på de andre.

Her slutter også deres bruk av denne strategien, og de går over til prøve og feile strategien (som beskrevet i neste avsnitt), som leder dem frem til en formel som fungerer.

Analyse: dette er en veldig kort seanse i denne gruppens prosess. De har lagt merke til hvordan antall komponenter i figurmønsteret utvikler seg fra et element til det neste, og prøver denne sammenhengen til å konstruere en formel. Derimot ser de raskt at den enkle formelen de prøvde på her ikke ga dem riktig svar, og i stedet for å jobbe videre med denne sammenhengen går de da videre til prøve og feile strategien.

I etterkant finner de en forklaring på formelen sin, f=3n+8, der de bruker rekursjon:

*56c Elev 2: fordi det øker med 3 da, så hadde det vært 8 på raden under! I rad minus 1 *tegnet inn raden som ville vært under for å vise**
57c Forsker: så hvilken rad er det?
58c Elev 2: det er rad nummer 0, blir det!
59c Elev 3: men akkurat nå er det rad nr 1

Analyse: I denne forklaringen benytter elevene en sammenheng basert på rekursjon, der de ser på utviklingen mellom radene. De ser da også for seg raden som ville vært foran rad 1 og tegner denne, som en forklaring på leddet «+8» i formelen. Det kan også tolkes som en kontekstuell strategi, der de konstruerer en formel ut fra informasjonen i oppgaven. Grunnet fokuset på utviklingen fra et element til det neste, og det at de også legger fokuset på raden som ville vært foran rad 1, velger jeg likevel å se på dette som en rekursjonsformelstrategi. Om hvorvidt det å finne en forklaring til formelen etterpå er å anse som en strategi, eller involverer algebraisk tenkning, vil gjøres nærmere rede for i diskusjonskapittelet.

4.2.3 Prøve og feile strategien

Prøve og feile strategien var den klart mest utbredte strategien i denne oppgaven. Begge gruppene jobbet med denne strategien gjennom nesten hele timen. Gruppe 2 fant formelen slik:

31d Elev 4: blir det da 11 + 3x?
32d Elev 6: ikke 3x nei. 3x da blir det jo ganger 3 det vi setter som x.
33d Elev 4: vi tester det. 11 pluss 3x, hvis vi da tar rad 5 så blir det 11 pluss 3 ganger 5. Det blir 11 pluss 15. Og det blir 28. Det blir feil ja. Det funka ikke.
34d Forsker: hvor mye feil blir det da?
35d Elev 4: 3…

36d Forsker: kan du endre på noe så den blir riktig da?
*37d Elev 4: minus 3. 11+3x-3. *tester formelen på arket*. Det blir riktig!*

Analyse: her jobber gruppene med tall de finner i oppgaven og forsøker å sette denne sammen til en formel. Ut fra min observasjon av situasjonen virket det ikke som elevene hadde noen begrunnelser for hvordan de satte sammen formelen som de gjorde, noen slik begrunnelse ble iallfall ikke tydeliggjort av elevene verken muntlig eller skriftlig. De fant bare tall i oppgaven som de satte sammen med en ukjent variabel (x) for å konstruere en formel. Da det viste seg at formelen ble feil fikk de spørsmål om de kunne endre på noe. De så da at formelen ga dem en verdi med 3 for mye, og prøvde derfor å trekke fra 3 for deretter å teste formelen. Etter å ha testet den fant de ut at det stemte, men de hadde vanskeligheter for å gi en forklaring på formelen i etterkant. Det kom godt frem senere i oppgaven da jeg spurte dem om begrunnelse for formelen sin:

61d Elev 6: finn en formel som kan brukes.
62d Elev 4: da er vi ferdig da
63d Elev 6: vi skriver den da
64d Forsker: ja. Hvorfor er formelen sånn da?
65d Elev 4: vi prøvde.. eller, 11…
66d Forsker: men hvor kommer 11 tallet fra?
67d Elev 4: vi starter første raden med 11 seter. Også, ja. Så plusser vi på tre for hver eneste. Minus tre fordi det bare funka.

Analyse: en kan argumentere for at de hadde noe form for begrunnelse for hvorfor de ønsket å starte med 11, men de forteller også tydelig at de tok minus 3 bare fordi det fungerte, noe som viser til en prøve og feile strategi. Prøve og feile strategien kjennetegnes også av at elevene ofte eksperimenterer med ulike tall de finner i konteksten, noe de har gjort med tallene 11 og 3 her.

Gruppe 1 gikk bevisst inn for å prøve og feile på denne oppgaven:

24c Elev 2: bare skriv litt forskjellig da, også prøver vi bare ut. Bare prøv, ikke skriv det samme som meg, bare skriv masse og prøv deg frem.

Etter at elevene har testet flere formler på arket hver for seg, finner de noe som stemmer:

29c Elev 2: jeg har funnet noe her jeg. 3n+8. Høres det rett ut? Det stemmer iallfall.

30c Forsker: hvordan fant du den?

31c Elev 2: jeg prøvde først 2n+9, men det ble ikke rett. Så da prøvde jeg 3n+8.

32c Forsker: hvor fikk du 2n+9 fra?

33c Elev 2: jeg bare tipper noe

Analyse: elevene har her ingen begrunnelser for formlene de velger å prøve. De eksperimenterer heller ikke nødvendigvis med tall fra konteksten, men bare prøver seg fram med ulike variasjoner av formler. Denne er ganske tydelig kategorisert som en prøve og feile strategi på grunn av den tydelige mangelen på argumenter for hvorfor formlene er som de er.

5. Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg drøfte dataene som ble presentert i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse) opp mot teorien fra kapittel 2. Denne drøftingen vil så danne grunnlaget for å kunne besvare de to forskningsspørsmålene i konklusjonen som kommer i neste kapittel. Forskningsspørsmålene i denne oppgaven er:

- *Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer et uttrykk basert på arbeid med figurtall?*

- *Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?*

Jeg har valgt å dele opp kapittelet i fire hoveddeler. Først vil jeg kort oppsummere funnene i datamaterialet, som er presentert i kapittel 4. Deretter vil jeg analysere funnene først med hovedvekt på erfaringen av de gitte oppgavene, deretter ut fra elevenes generaliseringsprosess og til slutt med hovedvekt på elevenes algebraiske tenkning. Jeg vil samtidig påpeke at alle delene henger sammen, så det er ikke alltid mulig å drøfte det ene om det andre utelates. Delene vil derfor innimellom gli litt over i hverandre.

5.1 Oppsummering av funnene i datamaterialet

I forrige kapittel ble det presentert noen utvalgte data fra datainnsamlingen. Alle de fem strategiene som er presentert i analyseredskapet (tellestrategien, prøve og feile strategien, rekursjonsformelstrategien, kontekstuell strategi og hel-objekt strategien) ble funnet i datamaterialet, men ikke alle ble brukt i hver oppgave. Jeg har derfor skilt litt på drøftingene rundt hver oppgave også i diskusjonen, for å tydeliggjøre at oppgavene virker å føre til bruk av ulike strategier. Under denne oppsummeringen av funnene vil jeg ikke gjenta elevenes sitater direkte, men disse finnes tilgjengelig i forrige kapittel. Oppgavene som elevene jobbet med er vedlagt i sin helhet i kapittel 4.

5.1.1 Oppgave 1 – bordoppstilling

Bordoppgaven er gjengitt i sin helhet i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse).

I denne oppgaven ble det funnet bruk av fire av de fem strategiene. Tellestrategien ble ikke identifisert i datamaterialet.

Begge gruppene startet med å benytte rekursjonsformelstrategien på denne oppgaven. Mens gruppe 2 benyttet den for å avdekke mønsteret, gikk gruppe 1 grundigere til verks og forsøkte å komme frem til en formel ved å benytte denne strategien. De benyttet den ganske tidlig for å finne svaret på hvor mange det var plass til rundt 1-10 bord, og benyttet da den rekursive sammenhengen og 2-gangen til å jobbe seg oppover i figurmønsteret. Ingen av gruppene kom i mål med formelen ved å benytte rekursjonsformelstrategien, men endte opp med å gå over til andre strategier.

Gruppe 2 benyttet hel-objekt strategien i stor grad gjennom denne oppgaven for å finne ut hvor mange det var plass til rundt bordene når rekken med bord begynte å bli lang. De var også flinke til å justere på tallene de benyttet, slik at de unngikk over- eller undertelling. Gruppe 1 benyttet ikke strategien like mye, men var innom den for å justere når forskjellen mellom antallet i bordrekkene ikke var så store.

Prøve- og feile strategien var lite benyttet i denne oppgaven. Gruppe 1 prøvde seg frem da de skulle snu om sin opprinnelige formel slik at den kunne regne ut antall bord de trengte for å få plass til et gitt antall personer. Etter relativt mye prøving og feiling kom de så frem til en formel som fungerte til dette formålet.

Kontekstuell strategi var strategien begge gruppene endte med å benytte for å finne den generelle formelen i denne oppgaven, men de kom ikke inn på denne strategien før de hadde vært innom flere av de andre strategiene først. Det kan virke som de etter mye jobbing med oppgaven fikk en god nok oversikt over konteksten til å benytte all informasjonen, samle den og konstruere en formel ut fra dette.

5.1.2 Oppgave 2 – kinoseter

Oppgaven er i sin helhet gjengitt i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse).

I analysen av denne oppgaven ble det kun avdekket tre strategier. Dette var tellestrategien, rekursjonsformelstrategien og prøve og feile strategien.

Tellestrategien ble brukt innledningsvis av begge gruppene. Det virker som denne oppgaven gjør at de trenger å telle opp kinosetene for å få en oversikt over oppgaven før de kommer seg videre. Begge gruppene forsøkte å benytte økningen de fant ved tellingen til å konstruere en formel, men ga raskt opp dette da det ikke ble riktig på første forsøk.

Rekursjonsformelstrategien ble benyttet av gruppe 1, da de prøvde å finne en formel basert på hvordan radene forandret seg fra gang til gang. Da dette ikke fungerte etter et par forsøk gikk de over til strategien som var klart mest utbredt i denne oppgaven, nemlig prøve og feile strategien.

Begge gruppene kom frem til sin formel ved å benytte prøve og feile strategien. Begge gruppene jobbet slik nesten hele økta, der de prøvde seg frem med ulike tall og formler som de testet på figurmønsteret. Da de til slutt fant formler som stemte etter flere testinger, sa de seg ferdige og hadde liten eller ingen interesse av å jobbe videre med forståelsen for hvorfor formlene ble slik.

5.2 Erfaringer med oppgavene

Selv om oppgave 1 (bordoppgaven) var den første oppgaven jeg presenterte for gruppene, var det også her gruppene i all hovedsak gikk mest systematisk til verks og jobbet med strategier og fremgangsmåter som de begrunnet med argumenter, noe som tilsier at de forsto det de jobbet med. Elevenes strategier viser at de raskt så noen sammenhenger i dette figurmønsteret som de forsto og følte de kunne jobbe videre med. Det at de fant riktige delsvar underveis gjorde at de opplevde mestringsfølelse, noe som igjen førte til at de i stor grad jobbet med strategier basert på forståelse (de var innom alle strategiene, men rekursjonsformelstrategien, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi var helt tydelig de mest benyttede).

Da gruppene ble presentert den andre oppgaven (kinoseteroppgaven), angrep de den med mer usikkerhet og gikk raskt til verks med prøve og feile strategien. Ingen grupper var innom hel-objekt strategien eller kontekstuell strategi, noe som kan tyde på at de ikke klarte å få et godt overblikk over helheten til oppgaven. Bruk av de ulike strategiene er drøftet nærmere i kapittel 5.3 (generaliseringsprosessen).

Ingen av oppgavene har oppgitt noe informasjon om tallmønsteret skriftlig i oppgaveteksten. All informasjon tilknyttet oppgavene som gjelder tall, må elevene selv hente ut fra figurmønsteret. Oppgavene ble utformet slik for å gjøre dem mest mulig åpne i forhold til hvilken strategi elevene skulle bruke, altså at oppgavene ikke skulle oppfordre til en spesiell type strategi. Dette står litt i kontrast til noen av oppgavene som Lannin (2005) benyttet i sin studie, der han påpeker at to av oppgavene han bruker tydelig oppgir den rekursive sammenhengen i oppgaveteksten. Dette førte også til at elevene startet å jobbe med den rekursive sammenhengen i disse oppgavene.

Jeg ønsker likevel å poengtere at selv om det ikke er oppgitt noen direkte sammenhenger i oppgavene, kan det likevel være slik at de leder elevene indirekte mot bruk av enkelte strategier. Dette kan være en mulig forklaring på at strategiene i de ulike oppgavene var så ulike. Til tross for at kinoseteroppgaven var den oppgaven de jobbet med sist, var det også her de jobbet minst systematisk. Jeg stiller meg da noen spørsmål rundt hvorfor det var slik:

- Kan kinoseteroppgaven ha vært for krevende for elevene, altså at de manglet nok erfaring og matematisk kompetanse til å angripe denne på en systematisk måte?
- Lignet bordoppgaven på noe elevene har jobbet med før, som gjorde at de kjente igjen mønsteret og derav hadde lettere for å se sammenhengene? Kan mønsteret i bordoppgaven ha vært for enkelt, siden det følger 2-gangen systematisk og regelrett oppover fra og med tallet 4 (antall personer på første bord)? Gjør dette at elevene kun gjenkjenner mønsteret og ikke behøver generalisering for å løse oppgaven?
- Er elevenes forkunnskaper rundt likningsløsning forstyrrende for deres evne til å generalisere fritt og selvstendig slik at de selv oppdager sammenhenger?

Lannin et al. (2006) poengterte at utformingen av figurmønsteroppgavene kan ha en innvirkning for hvilke strategier elevene velger for å generalisere. Her kan både det visuelle mønsteret spille inn, men også oppgaveteksten man benytter for å presentere elevene for oppgaven.

Jeg vil trekke frem en sentral forskjell mellom det visuelle mønsteret som ble presentert for elevene i henholdsvis bordoppgaven og kinoseteroppgaven. Mens bordoppgaven hadde et ganske systematisk mønster der stolene ved bordene var plassert systematisk og på linje med hverandre, hadde kinoseteroppgaven et mønster der setene i radene bakover var noe forskjøvet i forhold til raden foran. Dette er to ulike fremstillingsmetoder som kan bidra til å skape et inntrykk av at det ene mønsteret er mye ryddigere enn det andre. Det at et mønster er ryddig kan nok igjen bidra til at elevene lettere klarer å systematisere sammenhengene og utviklingen i mønsteret. Kanskje ville de hatt enklere for å angripe kinoseteroppgaven dersom de tegnet opp seteradene selv, uten forskyvningen mellom radene.

Det er også verdt å nevne at i bordoppgaven øker mønsteret fra venstre mot høyre i figurmønsteret, mens i kinoseteroppgaven øker mønsteret nedenfra og oppover. Å lese fra venstre mot høyre er den vanlige måten å se noe utvikle seg på, noe som kan virke mer strukturert og oversiktlig i forhold til en økning nedenfra og oppover.

En annen vesentlig forskjell mellom mønsteret i disse oppgavene er at i bordoppgaven skal elevene forholde seg til hver enkelt bordrekke hver for seg, og hvor mange det da er plass til totalt rundt den bordrekken. I kinoseteroppgaven vokser mønsteret i sin helhet. Elevene skal forholde seg til hvor mange det er i hver enkelt rekke, men rekkene henger sammen og gir inntrykk av en stor figur. Denne store figuren øker også med kvadratisk vekst, noe som kan gi elevene et inntrykk av at oppgaven er ekstra vanskelig, selv om det kun er de enkelte rekkene de skal forholde seg til. Rekkene vokser lineært.

I tillegg kan vi se på hvordan økingen fra element til element i de ulike figurmønstrene opptrer. I bordoppgaven øker antallet stoler jevnt for hvert nye bord, og økningen skjer etter 2-gangen. 2-gangen er nok noe de fleste elever på 9. klassenivå føler seg trygge på, og som de uten for store utfordringer kan jobbe videre med. I kinoseteroppgaven legges det til 3 nye seter for hver rad, noe som også er en jevn økning, men mens tall i 2-gangen er enkle å både doble og halvere fordi de alltid blir partall, vil bruk av 3-gangen føre til både partall og oddetall, noe som kan skape vanskeligheter med særlig halvering. I tillegg starter kinoseteroppgaven med 11 seter i rad 1, deretter henholdsvis 14 og 17 seter i de neste radene. De øker med 3 for hver nye rad, men forholder seg ikke til tallene i 3-gangen, noe som kan gjøre tallene i oppgaven mer ukjente for elevene å jobbe med.

I bordoppgaven er det oppgitt to detaljer om figurmønsteret i oppgaveteksten. Det ene er at bordene som settes sammen er kvadratiske, og det andre er at det er plass til en person på hver side. I kinoseteroppgaven er det ikke oppgitt noe informasjon om figurmønsteret i oppgaveteksten. Selv om informasjonen som oppgis i bordoppgaven også kan sees ganske tydelig i mønsteret, kan det at opplysningen er oppgitt både som tekst og på en figur være en god støtte for elevene når de skal begynne å samle inn informasjon som er viktig for generaliseringsprosessen.

Som jeg nå har vist så er det flere forskjeller mellom de to oppgavene som kan ha vært innvirkende for hvordan elevene angriper oppgavene og hvilke strategier som blir benyttet. Dette skal jeg drøfte nærmere i neste delkapittel.

5.3 Generaliseringsprosessen

Et viktig poeng når generaliseringsprosessen skal drøftes er at det ikke alltid var like enkelt å kategorisere strategiene elevene brukte. De hoppet gjentatte ganger frem og tilbake mellom strategiene, særlig når de ikke hadde noen tydelig plan. I mange tilfeller benyttet de en strategi for å få en slags oversikt, mens de etterpå benyttet det de fant ut gjennom å bruke en annen strategi for å komme frem til svaret de var ute etter.

For eksempel kan vi se på hvordan gruppe 2 angrep bordkontekstoppgaven. De startet med å prøve å finne mønsteret i forhold til bordet foran, noe som er en form for rekursjonsformelstrategi. De oppdaget raskt at mønsteret var at det økte med 2 for hver gang, og brukte da 2-gangen for å løse den første oppgaven der de skulle finne ut hvor mange det var plass til på 1-10 bord. Altså fant de et mønster ved å bruke rekursjonsformelstrategien, og benyttet deretter denne sammenhengen for å telle seg oppover til 10 bord ved å bruke 2-gangen.

Nå som oppgaven spurte etter hvor mange det var plass til rundt 20 og 50 bord endret de igjen strategi, og begynte med hel-objekt strategien. De benyttet fremdeles det de hadde lært om mønsteret ved å tidligere bruke rekursjonsformelstrategien og tellestrategien, men gjorde seg nå nytte av dette ved å se helheten i figurmønsteret. Til slutt skulle de finne den generelle formelen, og benyttet da i hovedsak kontekstuell strategi. For mer utdypende oversikt over elevenes samtaler i denne oppgaven, se kapittel 4 (datapresentasjon og analyse).

Som vi ser var altså elevene i gruppe 2 innom 4 ulike strategier i sin generaliseringsprosess, men strategiene var ikke uavhengige av hverandre. De tok med seg erfaringer og informasjon om figurmønsteret da de byttet strategi. Dette stemmer godt overens med det Stacey (1989) fant ut i sin studie, der det viser seg at de fleste elevene (64%) kombinerer flere strategier, gjerne ved å bytte strategi når det stopper opp med den de startet med.

En annen årsak til at strategiene kan være krevende å kategorisere, er at skillene mellom de ulike strategiene ikke alltid er like tydelige. Ved tellestrategien er det et kjennetegn at de teller ønskede egenskaper ut fra en figur og deretter finner sammenhenger ut fra dette, mens rekursjonsformelstrategien kjennetegnes ved at de bygger videre på forrige element i figurmønsteret for å jobbe seg oppover. Det uklare skillet her ligger blant annet i det at for å se på forskjellen mellom elementene i figurmønsteret er de avhengig av å se på økningen mellom dem, noe de gjerne finner ved å telle. Samtidig teller de seg da gjerne oppover med økningene, slik som i bordoppgaven der elevene telte med 2-gangen for å finne antall personer rundt 1-10 bord. Strategien involverer altså både telling og et fokus på å bygge videre på tidligere figurer i rekka for å jobbe seg oppover.

Hel-objekt strategien skiller seg mer fra de andre ved at den kjennetegnes av å multiplisere eller dividere kjente verdier i figurmønsteret for å finne verdien for større eller mindre elementer. Derimot kan prøve og feile strategien og kontekstuell strategi være lettere å forveksle. Mens et kjennetegn på kontekstuell strategi er at en formel konstrueres ut fra informasjonen i oppgaven, kjennetegnes prøve og feile strategien av at det eksperimenteres med ulike regneoperasjoner og tall, og da særlig tall som de finner igjen i oppgaven. Det uklare skillet her er hvorvidt elevene har en form for begrunnelse for sin strategi eller ikke. Selv om det fremstår for meg som at elevene setter sammen tallene tilfeldig, kan det ikke utelukkes at de har en form for begrunnelse som de ikke uttrykket tydelig muntlig eller skriftlig.

Jeg kommer nå til å gå over de fem strategiene fra rammeverket jeg har benyttet (se kapittel 2.5) og gjøre noen drøftinger rundt hver enkelt av de. Her kommer det frem noen tydelige forskjeller mellom de ikke-eksplisitte strategiene (tellestrategien og rekursjonsformelstrategien) og de eksplisitte strategiene (hel-objekt strategien, kontekstuell strategi og prøve og feile strategien).

5.3.1 Tellestrategien

Tellestrategien handler om å telle de ønskede egenskapene til en figur ut fra en tegning (Lannin, 2005).

Mine analyser viser at tellestrategien ble brukt av begge gruppene, men at de raskt endret til å bruke andre strategier. Så snart de hadde funnet svar på den første deloppgaven i kinoseter oppgaven: hvor mange seter det var i rad 5 og 8), syntes de det ble for mye å telle, og de søkte etter alternative strategier.

Lannin (2005) skriver at en del av tellestrategien er å benytte egenskapene elevene har telt seg frem til, til å konstruere en formel. I mine resultater hadde elevene problemer med dette, og det var heller ikke alltid de forsøkte å benytte det de fant ut til å konstruere den generelle formelen. I arbeidet med bordoppgaven begynte gruppe 2 med å telle for å finne svaret på hvor mange det var plass til rundt 1-10 bord. De forsøkte ikke å konstruere en generell formel ut fra disse tallene, og jeg vil også argumentere for at selv om de har telt fra figuren er det rekursjonsformelstrategien og ikke tellestrategien de har benyttet, fordi deres fokus helt fra begynnelsen var på hvordan antall komponenter i elementene utviklet seg oppover i figurmønsteret.

I kinoseteroppgaven ble tallene fra tellingen benyttet aktivt for å forsøke å finne en generell formel, men de låste seg litt fast i tallene de fikk fra tellingen. For eksempel da gruppe 1 skulle forsøke å generalisere ut fra tellingen låste de seg veldig fast i tallene 11 (som var antall seter i første rad) og 3 (som var økningen i antall seter mellom radene).

Dette tyder på at elevene ikke fikk et helhetlig nok bilde av figurmønsteret kun gjennom å telle fra tegningen. For å kunne komme frem til en korrekt generell formel trengte de mer kjennskap til mønsteret, samt å se flere egenskaper ved og mellom figurene.

Det kommer også tydelig frem i resultatene at denne strategien var en naturlig start for elevene når de skulle angripe oppgaven. For å bli kjent med det nye figurmønsteret begynte de nærmest automatisk å telle. Dette førte til at de fikk en oversikt over mønsteret, og hadde noe å jobbe videre med gjennom prosessen. Det var ingen grupper som senere gikk tilbake til strategien etter de hadde kommet seg videre.

5.3.2 Rekursjonsformelstrategien

Med rekursjonsformelstrategien benytter man det forrige elementet i figurmønsteret til å forsøke å bygge på for å finne en generell formel for figurmønsteret. Formler av denne typen innebærer at man må kjenne til antall komponenter i elementet foran (Lannin, 2005).

I likhet med tellestrategien, var dette også en strategi som elevene benyttet tidlig i prosessen med oppgavene. Særlig i bordoppgaven, der begge gruppene startet med denne. De kom ved hjelp av denne strategien frem til en generell sammenheng, som viser hvor mye antallet øker for hvert nye bord. Til tross for at begge gruppene kom frem til korrekte sammenhenger (startet med 4 personer på første bord, deretter øker det med to personer for hvert bord), og særlig gruppe 1 forsøkte å komme frem til en generell formel ved bruk av denne strategien, var dette også en strategi som ikke førte helt frem. Den ledet likevel til mange gode diskusjoner mellom elevene. Blant annet om hvorvidt figurmønsteret startet med 2, 3 eller 4 personer.

Også her ga elevene opp å finne den generelle sammenhengen, men de tok med seg sammenhengene de hadde funnet videre når de benyttet andre strategier. I likhet med tellestrategien var dette også en strategi det virket naturlig for dem å starte med, da det skapte en oversikt over hvordan elementene utviklet seg gjennom figurmønsteret.

5.3.3 Hel-objekt strategien

Ved bruk av hel-objekt strategien benytter man en del av figurmønsteret til å konstruere en større eller mindre del av mønsteret ved å benytte multiplisering eller dividering (Lannin, 2005).

I mine resultater ble det kun funnet bruk av hel-objekt strategien i bordkontekstoppgaven. Særlig gruppe 2 benyttet denne aktivt. For å multiplisere opp til elementnummeret de skulle ha, startet de med tallene de hadde funnet gjennom bruk av tellestrategien og rekursjonsformelstrategien. Det var særlig en elev (elev 4) som multipliserte og dividerte aktivt for å finne ut hvor mange det var plass til rundt 20 og 50 bord (deloppgave b). Denne eleven var også flink til å justere for de som satt på enden av bordene, slik at det ble unngått over- og undertelling. Da elev 6 benyttet samme strategi for å finne ut hvor mange bord som trengtes for å få plass til 100 personer (deloppgave c), ble det ikke justert korrekt for de som satt på endene, noe som førte til en overtelling (som raskt ble justert av elev 4).

Hel-objekt strategien krever tydelig høy forståelse for oppgaven det arbeides med, men også en god del matematisk forståelse for å unngå å gjøre feil siden tallene ikke kan multipliseres og divideres direkte, men alltid må justeres. Det er også årsaken til at det raskt blir små feil ved benyttelse av denne strategien. Elev 4 i mitt datamateriale viser en tydelig god forståelse for både konteksten og matematikken, og justerer korrekt opp og ned hele tiden. Også når de andre tenker at han gjør feil (for eksempel da de skulle finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 150 personer) greier han å argumentere korrekt for hvordan han justerer for over- og undertelling. Dette viser at forståelsen for å få brukt strategien korrekt var vanskelig for flere av elevene.

Som nevnt benyttet elevene tallene de fikk fra bruk av tellestrategien og rekursjonsformelstrategien for å jobbe med hel-objekt strategien. De greide da å finne svar på elementer som var lenger opp i figurmønsteret, men strategien fulgte dem fremdeles ikke frem til en generell formel. Sammenhengene de var blitt kjent med var altså fremdeles vanskelige å overføre fra det spesielle til det generelle.

Det er også interessant å se at ingen elever benyttet denne strategien da de jobbet med kinoseteroppgaven, til tross for at de allerede hadde jobbet med bordoppgaven og derfor var kjent med strategien. Elevene fikk tydelig et bedre overblikk over mønsteret i bordoppgaven, og det kan det være flere årsaker til. Jeg vil trekke frem noen mulige faktorer som kan ha spilt inn:

- I bordoppgaven økte det med 2 for hvert bord, mens i kinoseteroppgaven økte det med 3 for hver rad. Siden 2 er et partall er det enklere å multiplisere og dividere med enn det 3 er.
- Bordoppgaven legger til samme antall personer for hvert bord, mens i kinoseteroppgaven gir figuren et inntrykk av at det legges til flere og flere personer for hver rad. Økningen i forhold til forrige rad er alltid konstant med 3 seter, men totalt øker antallet seter mer og mer i den store figuren. Dette kan gi inntrykk av at det er den store figuren som helhet som teller, og ikke hver enkelt rad.
- Illustrasjonen av figurmønsteret i bordkonteksten er lettere å benytte for å få et overblikk over oppgaven, da figurene er av rektangulær form, mens kinoseter oppgaven får en stadig økende trekantform.

Til tross for at bruk av denne strategien viste mye matematisk kompetanse og forståelse for konteksten, var begge gruppene avhengige av å gå over på andre strategier for å komme frem til en generell formel.

5.3.4 Prøve og feile strategien

Prøve og feile strategien baserer seg på at elevene gjetter på formler som de tror kan passe til figurmønsteret. Ofte benytter de ulike tall som de finner i konteksten til å prøve seg frem med formler (Lannin, 2005).

Mine resultater viser at det var stor forskjell i bruk av prøve og feile strategien på de to ulike oppgavene. Jeg har nevnt tidligere at elevene virket å få en bedre forståelse for sammenhengene i bordoppgaven i forhold til i kinoseteroppgaven. Deres bruk av prøve og feile strategien bekrefter også dette. Under arbeidet med bordoppgaven var det lite bruk av denne strategien, mens i kinoseteroppgaven var dette den klart dominerende strategien.

Tidligere nevnte jeg noen faktorer som kan ha hatt betydning for at elevene bedre så sammenhengene i bordoppgaven i forhold til i kinoseteroppgaven. Så lenge de så en tydelig sammenheng de kunne jobbe ut fra, benyttet de strategier som baserte seg på forståelse, altså at de kunne argumentere for det de gjorde. Radford (2006) påpeker at prøve og feile strategien blant annet kjennetegnes ved at den mangler argumentasjon, og at det derfor ikke finnes bevis for at de er korrekte. I så måte er de egentlig kun hypoteser.

Da gruppe 1 jobbet med kinoseteroppgaven gikk de bevisst inn for å prøve seg frem til riktig formel. De prøvde med flere helt tilfeldige formler, og da de fikk spørsmål om hvor formlene kom fra var svaret at de bare gjettet. Selv om de bare gjettet, og manglet argumentasjon, var de likevel fornøyde når de hadde testet en formel flere ganger og den ga dem riktig svar. Dette stemmer også overens med det Lannin (2005) fant ut, der han hevder at elevene ofte sier seg fornøyde når de har funnet en formel som etter flere tester fungerer. De har da ingen interesse for å fortsette å jobbe med formelen, verken for å finne argumentasjoner eller undersøke ytterligere om den er korrekt.

Rivera & Becker (2005) sier også at elevene som benytter denne strategien har problemer med å jobbe strategisk videre med formelen sin når den blir feil. Under min datainnsamling viste det seg at dette også førte til lavere motivasjon hos elevene, og at det innimellom fikk dem til å ville gi opp. Under bordkontekstoppgaven prøvde gruppe 1 seg frem med den generelle formelen de hadde funnet ved hjelp av kontekstuell strategi da de skulle finne ut hvor mange bord de trengte for å få plass til 150 personer. De forsøkte å snu på formelen uten forståelse for hvorfor de prøvde som de gjorde, noe som gjorde at de mistet motivasjonen for å jobbe videre når de fant ut at det de hadde gjort var feil. På grunn av deres mangel på argumentasjon og forståelse hadde de ingen strategi for å jobbe videre når det de hadde gjort ble feil. Hadde de hatt en strategi kunne de kanskje kun tatt et par steg tilbake, mens når strategien kun baserer seg på prøving og feiling vil et galt svar gjøre at de må gå helt tilbake og begynne på nytt, og det var tydelig at dette var demotiverende for dem.

Det var samtidig tydelig at elevene så på denne strategien som en enkel utvei når de ikke hadde noen annen formening om hvordan de skulle angripe oppgaven. De slipper da å lete etter sammenhenger og bruke logikk, men kan prøve seg frem med vilkårlige formler uten å tenke så mye. Likevel var de like fornøyde når de hadde kommet frem til en formel som fungerte ved bruk av denne strategien som når de benyttet en annen strategi, til tross for at de manglet argumentasjon og forståelse. Det viser også at elevene er mest interesserte i svaret, og ikke forståelsen for matematikken.

5.3.5 Kontekstuell strategi

Kontekstuell strategi baserer seg på konstruksjon av en formel ut fra informasjonen som er oppgitt i oppgaven, samt at formelen blir relatert til en telleteknikk (Lannin, 2005).

I likhet med hel-objekt strategien, ble også kontekstuell strategi i mine resultater kun funnet benyttet av elevene i bordoppgaven. Til gjengjeld var det denne strategien som til slutt førte elevene frem til den generelle formelen i denne oppgaven.

Gruppe 2 har benyttet opplysningene de fant fra rekursjonsformelstrategien (antall personer rundt hvert bord og økningen fra bord til bord), samt støttet seg veldig til figurmønsteret i oppgaveteksten til å konstruere en formel. Denne formelen har de en begrunnelse for, og en forklaring som gjør at de er sikre på at formelen stemmer.

Radford (2010) skiller mellom algebraisk generalisering og induksjon, altså at elevene jobber med algebraiske strategier og forståelse for å komme frem til en formel eller at de gjetter og prøver seg frem til en formel. Han sier at å generalisere et mønster med algebraisk tenkning innebærer å forstå fellestrekk i elementene i mønsteret og bruke disse opplysningen til konstrueringen av formelen. Slik jeg tolker kontekstuell strategi er det nettopp det elevene gjør her. Dette viser også at bruk av denne strategien har høy grad av algebraisk tenkning, noe som krever at elevene har forståelse for oppgaven, ser helheten og er i stand til å benytte denne som en del av sin strategi. Det er gjort nærmere rede for elevenes algebraiske tenkning i kapittel 5.4 (elevenes algebraiske tenkning).

5.3.6 Oppsummering av elevenes bruk av strategier

Den mest tydelige forskjellen mellom bruk av de ikke-eksplisitte- og de eksplisitte strategiene var at elevene startet med å bruke de ikke-eksplisitte strategiene, men at disse ikke førte dem helt frem til en generell formel. Selv om disse strategiene ikke førte dem helt frem, betyr det ikke at de ikke var verdifulle for elevene i arbeidet. Det ga de god kjennskap til figurmønsteret og hvordan det utviklet seg mellom elementene. Sammenhengene de fant benyttet de videre da de gikk over til å bruke de eksplisitte strategiene.

Siden ingen av gruppene valgte seg en strategi og benyttet denne gjennom hele oppgaven, er det en klar indikasjon på at strategiene hver for seg ikke er gode nok til at elevene både får det overblikket over figurmønsteret som de trenger, og leder dem frem til en generell formel. De ulike strategiene hadde hver for seg sine funksjoner for at elevene til slutt greide å komme frem til de generelle formlene som representerte figurmønstrene.

Kort oppsummert er de viktigste funnene knyttet til elevenes generaliseringsprosess i denne studien:

- Elevenes strategier var ikke alltid like enkle å kategorisere, fordi de i stor grad kombinerte flere strategier når de jobbet
- De ikke-eksplisitte strategiene (tellestrategien og rekursjonsformelstrategien) ble i stor grad benyttet av elevene til å skaffe en oversikt over figurmønsteret, mens de eksplisitte strategiene (hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi) ble benyttet for å se mer generelle sammenhenger
- Dersom elevene greide å konstruere en formel uten begrunnelse eller forståelse (særlig ved bruk av prøve og feile strategien), følte de seg likevel ferdige når formelen var testet ut på flere elementer i figurmønsteret og ga dem riktig svar

5.4 Elevenes algebraiske tenkning

Da gruppe 1 jobbet med kinoseteroppgaven benyttet de i all hovedsak prøve og feile strategien. Etter å ha jobbet lenge med denne møtte de noen problemer, da formelen ikke ble helt riktig. Dette førte til at elevene mistet helt motet og nesten ga opp hele oppgaven. Siden de ikke hadde noen tanker for hvorfor de forsøkte som de gjorde førte det til at når formelen ble feil måtte de starte helt på nytt. Da elevene gjorde feil i arbeid med de andre strategiene kunne de bare rykke et par hakk tilbake og jobbe seg videre derfra, da de hadde en forståelse for fremgangsmetoden sin liggende til grunn for arbeidet de gjorde. Et eksempel på det var da gruppe 1 jobbet med rekursjonsformelstrategien på bordkontekstoppgaven. De fant mønstre i figurtallene som de jobbet med, og så på hvordan mønsteret utviklet seg. De brukte disse tallene og observasjonene til å prøve å lage formler, men hadde noen mislykkede forsøk underveis. Da disse viste seg å være feil gikk de bare litt tilbake i oppgaven og prøvde på nytt med den informasjonen de hadde hentet ut fra oppgaven og som de var sikre på. De ga derfor ikke opp hele oppgaven, men klarte å jobbe seg videre.

Da gruppe 2 jobbet med kinoseteroppgaven gikk de aktivt inn for å forsøke ulike formler uten å forstå dem. Dette til tross for at de hadde arbeidet seg gjennom de første deloppgavene ved hjelp av å finne mønstre og sammenhenger i figurmønsteret. Det kan virke som om elevene syntes det var enklere å gjette seg frem til en formel, i stedet for å gå systematisk til verk å konstruere enn ut fra forståelse. Da de etter hvert kom frem til en formel som fungerte ($3n+8$) var de fornøyd med egen innsats og hadde ingen interesse for å jobbe mer med forståelsen av det de hadde gjort. De lette etter svaret på oppgaven – en formel. Da formelen var funnet anså de oppgaven som fullført.

Elevenes strategier har totalt sett i stor grad ledet fram til riktige formler, men det er ikke nødvendigvis synonymt med at de har tenkt algebraisk. Jeg vil i likhet med Radford (2010) anse bruk av prøve og feile strategien som induksjon, snarere enn algebraisk generalisering. Radford (2010) hevder at ikke alle strategier som fører til en generell formel er algebraisk generalisering, men heller et resultat av gjetning. Dette kommer også tydelig frem når elevene må starte helt på nytt dersom det viser seg at formelen ikke fungerer, mens de ved bruk av for eksempel rekursjonsformelstrategien kunne jobbe videre med de opplysningene de fremdeles var sikre på at stemte.

Radford (2010) presenterte også tre kjennetegn for algebraisk tenkning:

- En grad av ubestemthet som er karakteristisk for grunnleggende algebraiske objekter (som ukjente, variabler og parametere). Det er denne ubestemtheten som gir muligheten av å blant annet bytte ut en variabel med en annen.
- Ubestemte objekter håndteres analytisk.
- Symbolismen som benyttes for å symbolisere objektene i algebraiske uttrykk. Disse symbolene kan være bokstaver, men det kan også være andre tegn. Det å benytte bokstaver alene er ikke en indikasjon på at en tenker algebraisk.

Mason (1996) har også noen kjennetegn på algebraisk tenkning:

- Se likheter og forskjeller
- Gjøre distinksjoner
- Repetere, sortere, kategorisere

Jeg vil kort drøfte hver enkelt strategi opp mot disse kjennetegnene for å kunne vurdere hva strategiene sier om elevenes algebraiske tenkning. Det er viktig å påpeke innledningsvis at de ulike kjennetegnene på algebraisk tenkning vil være mer eller mindre oppfylt, og at det derfor ikke kan konkluderes med at elevene enten har tenkt algebraisk eller ikke. Jeg har derfor valgt å betegne strategiene som at de viser høy eller lav grad av algebraisk tenkning. Det er samtidig viktig å presisere at strategiene kan benyttes på flere ulike måter av ulike elever, og at graden av algebraisk tenkning innenfor hver strategi derfor kan være ulik ut fra hvem som benytter strategien. Dette er også noe jeg kommer nærmere tilbake til underveis i analysen.

5.4.1 Tellestrategien

Som nevnt tidligere i kapittelet var tellestrategien en naturlig inngangsport som elevene benyttet for å skaffe seg informasjon om oppgaven og for å komme i gang. Tellestrategien førte derimot ikke elevene så veldig langt i generaliseringsprosessen, selv om den ga verdifull informasjon som de benyttet for å jobbe videre med generaliseringsprosessen.

Da gruppe 1 forsøkte å konstruere en formel ved bruk av tellestrategien benyttet de en ukjent, n, i den formelen de forsøkte. Det var likevel ingen refleksjoner eller begrunnelser for den ukjente variabelen involvert, og de kan derfor ikke sies å ha håndtert den analytisk. Zazkis & Liljedahl (2002) fant i sin studie at det ikke nødvendigvis var noen tydelig sammenheng mellom deltagernes algebraiske tenkning og bruk av algebraisk symbolisme, og at tilstedeværelsen av algebraiske symboler i seg selv ikke kan sees på som en indikasjon på algebraisk tenkning. Radford (2010) påpekte også at bruk av bokstaver i seg selv ikke er en indikasjon på algebraisk tenkning. I denne situasjonen har elevene forsøkt å sette inn en variabel i formelen fordi de trolig forstår at det er nødvendig for å kunne finne en generell sammenheng, men mangelen på argumentasjon gjør at jeg analyserer prosessen til å ikke innebære en høy grad av algebraisk tenkning.

Mason (1996) sier også at å se likheter, forskjeller, gjøre distinksjoner, sortere og kategorisere er kjennetegn på algebraisk tenkning. Bruk av tellestrategien for å finne en generell formel krever en grad av å se likheter og forskjeller mellom de ulike elementene i figurmønsteret, men fraværet av analyse rundt disse gjør at heller ikke dette tyder på høy grad av algebraisk tenkning.

5.4.2 Rekursjonsformelstrategien

Rekursjonsformelstrategien var i likhet med tellestrategien en strategi som elevene benyttet relativt tidlig i generaliseringsprosessen. Denne strategien ga dem mulighet til å løse flere deler av oppgaven enn tellestrategien, men førte heller ikke frem til en riktig formel.

Gruppe 2 startet bordoppgaven med en rekursjonsformelstrategi. Det å ha fokus på tidligere elementer i figurmønsteret og jobbe seg videre ut fra dette mønsteret innebærer at elevene må se flere sammenhenger og legge merke til disse i figurmønsteret. Elevene i gruppe 2 startet med å legge merke til hvor mange det ble lagt til for hvert bord. Dette innebærer at de ser forskjellene og distinksjonene mellom elementene i figurmønsteret, som i dette tilfellet er at antall komponenter øker med 2 for hvert element. De legger også merke til likheter når de analyserer hvordan figurmønsteret alltid vokser på samme måte fra et element til det neste. Gjennom å legge merke til dette mønsteret har de funnet et system som de kan repetere fra element til element, og på den måten finne antall komponenter i alle elementene i figurmønsteret, så lenge de jobber seg oppover fra et element med kjent verdi. Mange av Mason (1996) sine kjennetegn på algebraisk tenkning er altså å finne igjen i elevenes prosess i dette tilfellet. I dette eksempelet ble det ikke benyttet en ukjent variabel eller algebraisk symbolisme, men som Zazkis & Liljedahl (2002) påpeker kan ikke fraværet av algebraisk symbolisme i seg selv sees på som en bekreftelse på fravær av algebraisk tenkning.

I kinoseteroppgaven var gruppe 1 raskt innom rekursjonsformelstrategien. De forsøkte å legge inn en ukjent variabel (*«nummeret»*, som i dette tilfellet referer til elementnummeret i figurmønsteret) og bruke økningen mellom elementene samt antall komponenter i det første elementet til å sette opp en formel. Til tross for dette ga de opp denne strategien med en gang da den ikke stemte på første forsøk, og de har derfor ikke håndtert variabelen analytisk.

Rekursjonsformelstrategien kan benyttes på flere ulike måter, og kjennetegnene på algebraisk tenkning som Mason (1996) og Radford (2010) påpeker kan være mer eller mindre til stede i denne prosessen. Denne strategien kan derfor innebære mye algebraisk tenkning, men den kan også benyttes uten noen stor grad av dette. Det er nærliggende å tenke at utformingen av figurmønsteret kan ha betydning for hvor høy grad av algebraisk tenkning elevene må benytte for å kunne se en rekursiv sammenheng. Dersom sammenhengen er såpass enkel at de kun kan telle seg enkelt oppover uten å benytte noen form for variabel krever det mindre analyse og derav mindre algebraisk tenkning.

I tillegg vil jeg trekke frem at en rekursiv strategi i utgangspunktet fører frem til en formel der en er avhengig av å vite verdien av elementet foran i rekka for å komme seg videre. Dette er ofte en relativt enkelt sammenheng, som gjerne innebærer at en kan sette formelen som «tidligere verdi + økning». Dette i seg selv krever ikke at den ukjente variabelen analyseres for å se en generell sammenheng for hele mønsteret, fordi de er avhengige av å kjenne til verdien av forrige element i rekka for å komme seg videre.

5.4.3 Hel-objekt strategien

Hel-objekt strategien ble aktivt benyttet av gruppe 2 på bordoppgaven. Med denne strategien klarte de å finne verdien av flere elementer ganske høyt oppe i figurmønsteret. De benyttet ikke denne strategien til å jobbe seg frem til en generell formel.

Elev 4 i gruppe 2 var den som jobbet mest aktivt med denne strategien og samtidig greide å gjøre korrekte justeringer for å unngå over- eller undertelling. I dette tilfellet vil den ukjente variabelen de arbeider med å finne være verdien av et element i rekken. For å kunne gjøre de nødvendige justeringene for å unngå over- og undertelling kreves det at de analyserer figurmønsteret grundig på flere måter.

Selv om bruk av hel-objekt strategien i dette tilfeller ikke inneholder algebraisk symbolisme, er likevel mange av kjennetegnene på algebraisk tenkning til stede. Elevene jobber aktivt med figurmønsteret og ser flere likheter og forskjeller. Blant annet ser de likhetene rundt hvordan antallet personer vokser på samme måte hele tiden, og forskjellen i hvordan de personene som sitter på endene vil påvirke verdien av elementene i figurmønsteret. Elev 4 gjør også distinksjoner mellom verdien av blant annet elementnummer 10 (verdi 22) og elementnummer 20 (verdi 42) ved å se at det ikke er bare å multiplisere med 2, men at det må justeringer til. Samtidig repeterer de denne prosessen både ved å bevege seg oppover og nedover i mønsteret og setter sammen flere verdier slik at det passer til elementnummeret de leter etter. Jeg vil derfor også argumentere for at de gjør flere analyser av den variabelen de er på utkikk etter.

Som Lannin (2005) påpeker hender det ofte at elever gjør feil justeringer når de benytter hel-objekt strategien. Dette skjedde ikke i mine data, men uten justeringene som elevene benyttet for å unngå dette ville de håndtert situasjonene langt mindre analytisk, og graden av algebraisk tenkning ville da trolig vært mye lavere.

5.4.4 Prøve og feile strategien

Prøve og feile strategien var særlig utbredt på kinoseteroppgaven. Den førte elevene frem til generelle formler, men uten begrunnelse for hvorfor formlene stemte.

Jeg vil særlig trekke frem strategien gruppe 1 benyttet på kinoseteroppgaven, der de gikk bevisst inn for å prøve seg frem til en riktig formel frem til de fant en som etter gjentatte testinger viste seg å stemme. Her benyttet de heller ikke tall de fant i konteksten, som elevene ofte gjør når de benytter denne strategien. Det å velge tilfeldige tall og regneoperasjoner for så å sette dem sammen til en formel innebærer ingen grad av analyse av figurmønsteret. De jobber med en ukjent variabel. Elevene benytter algebraisk symbolisme (den ukjente «x») for variabelen, men denne håndteres aldri analytisk. Dette er med andre ord et godt eksempel på at tilstedeværelse av algebraiske symboler i seg selv ikke er et kjennetegn på algebraisk tenkning, slik Zazkis & Liljedahl (2002) påpekte.

Prøve og feile strategien ble også benyttet av gruppe 1 både i bordoppgaven og kinoseteroppgaven. I kinoseteroppgaven prøvde de seg frem med tall de fant i konteksten, noe som vil innebære at de gjør en viss analyse av figurmønsterets utvikling. De ser blant annet at verdien i det første elementet er 11, og at det deretter øker med 3 ekstra for hver rad. Dette gjør at de ser noen likheter i figurmønsteret, men at de ikke jobber videre med analyse av hva disse likhetene innebærer. I stedet prøver de seg frem med å sette sammen disse tallene på måter de ikke har noen begrunnelse for. Jeg vil derfor vurdere at prøve og feile strategien også her har en lav grad av algebraisk tenkning.

5.4.5 Kontekstuell strategi

Kontekstuell strategi ble benyttet av begge gruppene for å finne den generelle formelen i bordoppgaven.

Da elevene benyttet kontekstuell strategi viste de tydelig forståelser for figurmønsteret. De benyttet algebraisk symbolisme for å uttrykke den ukjente variabelen («x»). Denne variabelen var de bevisst på at representerte antall bord som var sammensatt. De analyserte så at hvert bord alltid hadde plass til to personer, og at den ukjente variabelen derfor måtte behandles som «2x». I tillegg var de oppmerksomme på hvordan figurmønsteret utviklet seg på samme måte hele tiden, ved at det alltid ble lagt til 2 personer for hvert nye bord, og at denne økningen hadde betydning for hvordan den generelle formelen ble. I sin prosess har de altså sett likheter mellom elementene i figurmønsteret (hvor mange det er plass til for hvert bord og at økningen alltid er lik hver gang man legger til et nytt bord), de har også sett at denne likheten alltid repeteres oppover i mønsteret, og de har kategorisert og sortert verdiene som de har funnet inn i en formell slik at formelen stemmer.

Gjennom sitt arbeid med å komme frem til en formel ved bruk av denne strategien vil jeg argumentere for at alle kjennetegnene som Radford (2010) og Mason (1996) presenterer som tegn på algebraisk tenkning er mer eller mindre oppfylt, og at denne strategien er den som representerer høyest grad av algebraisk tenkning.

5.4.6 Oppsummering av elevenes algebraiske tenkning

Selv om de ulike strategiene kan implisere hvorvidt elevene tenker algebraisk i sin prosess mot å finne en generell sammenheng eller ikke, kan det være store forskjeller mellom hvordan elevene jobber med en og samme strategi. Dette vil også ha betydning for hvor høy grad av algebraisk tenkning elevene har ved bruk av en strategi.

Elevenes algebraiske tenkning var krevende å analysere, da kjennetegnene på algebraisk tenkning ikke er så konkrete at de enten er oppfylt eller ikke. Kjennetegnene var derfor i alle tilfellene mer eller mindre oppfylt.

Generelt viste elevene lavest grad av algebraisk tenkning da de benyttet tellestrategien og prøve og feile strategien, mens de viste høyest grad av algebraisk tenkning da de benyttet kontekstuell strategi og hel-objekt strategien. Rekursjonsformelstrategien innebar også i noen tilfeller en del algebraisk tenkning.

Kort oppsummert var mine viktigste funn rundt analysen av elevenes algebraiske tenkning:

- Hvorvidt elevene tenkte algebraisk eller ikke vil være et kvalitetskrav som er mer eller mindre oppfylt, og ikke et spørsmål man enkelt kan svare «ja» eller «nei» på.
- Strategier som krever at elevene har stor forståelse for mønsteret (kontekstuell strategi, hel-objekt strategien og til en viss grad rekursjonsformelstrategien) viser flere kjennetegn på algebraisk tenkning i forhold til strategiene som krever mindre forståelse for mønsteret (tellestrategien og prøve og feile strategien).

5.4.7 Å finne forklaring til formelen

I flere tilfeller viste det seg at elevene klarer å komme frem til en formel uten begrunnelse, da særlig ved bruk av prøve og feile strategien. Eksempelet der gruppe 2 jobbet med prøve og feile strategien på kinoseteroppgaven for å finne et svar er et godt eksempel på dette. De gikk bevisst inn for å finne formelen – ikke forklaringen bak formelen.

Likevel viste det seg at selv om formelen ble funnet ved hjelp av gjetting, greide noen elever etterpå å konstruere en forklaring for formelen som var riktig. De gjettet seg altså frem til formelen først, og deretter fikk de forståelse for hvorfor formelen stemte. Er dette algebraisk tenkning? Jeg vil si både ja og nei.

Selv om de i utgangspunktet ikke har benyttet en strategi med høy grad av algebraisk tenkning når de jobbet for å komme frem til formelen, må det likevel kunne sies å være noe verdifullt i å finne en forklaring etterpå. I utgangspunktet har de ikke oppfylt kjennetegnene for algebraisk tenkning underveis og jobbet målrettet med disse for å finne en formel. De har ikke jobbet med likheter, forskjeller, utviklinger, sorteringer, kategoriseringer, systematisk benyttet ubestemtheter og analysert disse i en prosess for å komme frem til en formel.

Likevel vil de i større eller mindre grad se disse sammenhengene når de har den ferdige formelen å gå ut fra. Da må de analysere hvert ledd i formelen, også den ukjente variabelen, for å kunne finne en forklaring for hvorfor formelen er som den er. Kanskje kan disse erfaringene være verdifulle til neste gang de skal jobbe med liknende oppgaver og på den måten være et ledd i utviklingen av deres algebraiske tenkning.

6. Avsluttende refleksjon og konklusjon

Gjennom denne oppgaven er elevenes strategier for generalisering i arbeid med figurtall blitt studert. Problemstillingen oppgaven har jobbet ut fra er:

- *Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer i arbeid med figurtall?*

Ut fra denne problemstillingen har jeg forsøkt å finne svar på de to forskningsspørsmålene *«Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer et uttrykk basert på arbeid med figurtall?»* og *«Hva sier elevenes strategier om deres algebraiske tenkning?»*

For å besvare disse forskningsspørsmålene ble det utformet to oppgaver med ulike figurmønstre. Disse oppgavene ble gitt til to grupper à 3 elever fra 9. trinn. Ved hjelp av videoopptak, observasjoner og skriftlige arbeider som elevene gjorde underveis ble det uthentet datamateriale som dannet grunnlaget for å forsøke å besvare forskningsspørsmålene.

Datamaterialet er presentert og analysert i kapittel 4 (datapresentasjon og analyse) og videre diskutert og drøftet basert på teorien i kapittel 2 i kapittel 5 (diskusjon).

Min analyse har vist at elevene i stor grad benytter både tellestrategien, rekursjonsformelstrategien, prøve og feile strategien, hel-objekt strategien og kontekstuell strategi når de generaliserer i figurmønsteroppgaver. De forholder seg imidlertid ikke til en enkelt strategi gjennom oppgaven, men bytter på og er innom flere. Når de bytter strategi tar de med seg informasjon og erfaringer de fikk fra tidligere benyttede strategier videre og bruker dem når de jobber med en ny strategi. Det viste seg også at det ikke alltid var like enkelt å skille de ulike strategiene og kategorisere dem. De to oppgavene skilte seg også fra hverandre ved at elevene angrep den på ulike måter og med ulike strategier. Her kan oppgavenes utforming og formulering ha spilt inn for hvordan elevene har oppfattet oppgavene og dermed påvirket hvordan de jobbet med dem.

Tellestrategien var i stor grad en naturlig strategi for elevene å starte med for å danne seg et overblikk over figurmønsteret og hvordan det utviklet seg. Det samme var rekursjonsformelstrategien, som elevene benyttet for å se hvordan figurmønsteret endret seg fra et element til neste element. Begge disse strategiene ble benyttet i oppstartsfasen av begge gruppene. Rekursjonsformelstrategien ble benyttet på begge oppgavene, mens tellestrategien kun ble identifisert i dataene fra kinoseteroppgaven. Disse strategiene førte derimot ikke frem til noen generelle formler, og elevene endret til bruk av andre strategier når de begynte å komme langt opp i rekken av elementene i figurmønsteret.

Etter elevene hadde gjort seg kjent med figurmønsteret ved bruk av tellestrategien og rekursjonsformelstrategien, byttet de til å enten benytte prøve og feile strategien, eller hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. Elevene benyttet prøve og feile strategien dersom de ikke hadde klart å finne noe tydelig mønster som de fikk en god forståelse for under arbeid med tellestrategien og rekursjonsformelstrategien. Dersom de hadde en god forståelse for hvordan mønsteret utviklet seg benyttet de i større grad hel-objekt strategien og kontekstuell strategi. Hel-objekt strategien hjalp dem til å finne svar på antall komponenter i et element høyt oppe i figurmønsteret, mens både kontekstuell strategi og prøve og feile strategien ledet dem til de generelle formlene for hvordan figurmønsteret utviklet seg.

Videre har jeg forsøkt å analysere elevenes algebraiske tenkning når de jobber med de ulike strategiene. Mine analyser har vist at det er stor forskjell på deres algebraiske tenkning avhengig av hvilken strategi de benytter, men at strategiene kan benyttes på ulike måter og derfor kan samme strategi innebære ulik grad av algebraisk tenkning avhengig av hvordan den benyttes.. Mens noen strategier fører dem langt på vei i generaliseringsprosessen og krever at de jobber med ubestemtheter og analyserer disse, samt ser sammenhenger og forskjeller mellom elementene i figurmønsteret og sorterer og kategoriserer, krever andre strategier mindre av dette.

Gjennom mine analyser har jeg konkludert med at de ikke-eksplisitte strategiene (tellestrategien og rekursjonsformelstrategien) krever liten grad av algebraisk tenkning, men at særlig rekursjonsformelstrategien kan innebære en del av det avhengig av hvordan elevene jobber med dem. Av de eksplisitte strategiene (hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi) kreves det at elevene tenker algebraisk for å kunne se sammenhengene og jobbe med hel-objekt strategien og kontekstuell strategi, mens prøve og feile strategien er en strategi der elevene kun gjetter seg frem og ikke tenker algebraisk i det hele tatt.

Det har også kommet frem at selv om elevene gjetter seg frem til en generell formel ved prøve og feile strategien, og da ikke tenker algebraisk når de jobber, kan de finne sammenhenger og forklaringer til formelen i etterkant. Selv om de da ikke har tenkt algebraisk når de jobbet med oppgaven, vil det å finne en forklaring til formelen i etterkant også kunne være verdifull læring for dem slik at de videreutvikler sin evne til algebraisk tenkning når de møter lignende oppgaver senere.

Basert på forskningsspørsmålene som denne studien har arbeidet mot å finne et svar på, vil jeg konkludere med at elevene i stor grad benytter flere ulike strategier når de arbeider med generalisering av figurtall. De kombinerer gjerne også de ulike strategiene, og jobber med dem etter tur for å komme frem til en generell formel. Elevene benyttet gjerne de ikke-eksplisitte strategiene (tellestrategien og rekursjonsformelstrategien) for å skaffe seg oversikt over og kunnskap om figurmønsteret, før de gikk over til en eller flere av de eksplisitte strategiene (hel-objekt strategien, prøve og feile strategien og kontekstuell strategi) for å finne den generelle formelen. De ulike strategiene innebærer også ulik grad av algebraisk tenkning. Selv om en ikke kan konkludere med at noen strategier alltid innebærer stor grad av algebraisk tenkning og andre strategier ikke gjør det, viser resultatene fra denne studien at tellestrategien og prøve og feile strategien er de strategiene der elevene tenker minst algebraisk, mens hel-objekt strategien og kontekstuell strategi er de strategiene der elevene har høy grad av algebraisk tenkning. Rekursjonsformelstrategien ligger et sted midt mellom.

I og med at omfanget av denne studien er såpass liten, og antallet informanter er såpass få, er det viktig å poengtere at resultatene ikke kan konkludere med sikkerhet for hvordan elever jobber med figurtallsoppgaver, men de kan si noe om tendensene. For å få resultatet enda sikrere kunne studien med fordel både inneholdt flere informanter og hver gruppe kunne jobbet med flere oppgaver hver. Likevel vil jeg poengtere at mine resultater stemmer godt overens med tidligere forskning på feltet, noe som styrker validiteten på studien i sin helhet.

6.1 Videre forskning

Det er mange interessante og mulige utvidelser som kan gjøres av denne studien. For det første ville det vært interessant å teste de samme oppgavene på flere elever, gjerne fra ulike skoler, for å undersøke om det er noen store forskjeller. Siden elevene som har samtykket til å delta i dette prosjektet virker som elever som er godt motiverte for og glad i faget matematikk, ville det også vært interessant å undersøke hvordan oppgavene fungerer for elever som har lavere motivasjon for matematikk, og som kanskje presterer dårligere faglig.

Disse oppgavene kunne det også vært interessant å teste på yngre elever, altså elever som ikke har jobbet med algebra tidligere. En ville da fått et bedre bilde av hvordan introduksjon av algebra ved bruk av jobbing med figurmønstre fungerer.

Det hadde også vært interessant å studere elevenes strategier når de jobber med figurtall med kvadratisk vekst. Det er nok mer krevende for elevene og egner seg ikke på lavere trinn, men kunne vært en interessant studie å gjennomføre på ungdomsskolen eller i videregående skole for å undersøke om strategiene skiller seg fra strategiene som kommer frem når elever jobber med figurtall med lineær vekst. Det er mye tidligere forskning på feltet som tar for seg figurtall med lineær vekst, men gjennom min studie har jeg funnet lite forskning som tar for seg figurtall med kvadratisk vekst.

Litteraturliste

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching (Vol. 18). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematical Education Research journal*, 12(2), 107–126. https://doi.org/10.1007/BF03217079

Christoffersen, L. & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, *24*(3), 315–331. https://doi.org/10.1080/0305569980240305

Johannesen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg). Abstrakt forlag.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode: Ei innføring*. Fagbokforaget.

Kaarstein, H., Radisic, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T., & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo. https://www.udir.no/contentassets/37a3d93be4464299a8998258ba1ae814/timss-2019-kortrapport---nettversjon.pdf

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching (s. 87- 106). Dordrecht: Springer Netherlands.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots og algebra. I I. N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65–86). Dordrecht.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Måsøval, H. S. (2011). *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college* [Doktorgradsavhandling]. University of Agder Faculty of Engineering and Science.

Personopplysningsloven. (2018, 15. juni). *Lov om behandling av personopplysninger (personopplysningsloven)* https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2018-06-15-38

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra through Generalization. I N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra* (s. 107–111). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_7

Radford, L. (2006). Algenraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. I PME-NA 2006. Mérida: Universidad Pedagógica National.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalization in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(4), 198-203.

Sander, K. (2020, 22. november). *Forskningsdesign*. https://estudie.no/hva-er-forskningsdesign/

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study. (2000). *Mathematics Education Research Journal*, *12*(1), 62-69. https://doi.org/10.1007/BF03217075

Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (2020b, 13. november). *Den internasjonale studien TIMSS*. https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss/

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 305-312.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Vedlegg 1 – samtykkeskjema til foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet

Strategier for generalisering i arbeid med figurtall?

- Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å avdekke hvilke metoder elever benytter når de skal generalisere et uttrykk mens de arbeider med figurmønstre. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Prosjektet skal undersøke hvilke metoder elever benytter når de arbeider med algebra, nærmere bestemt med figurtall. I Norge gjennomføres TIMSS undersøkelsen hvert fjerde år. Undersøkelsen ble første gang gjennomført i 1995, og Norge har deltatt i hver undersøkelse med unntak av i 1999. TIMSS måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 5. og 9. trinn. Det har vært et sentralt funn i undersøkelsen at norske elever scorer dårligst i tall og algebra. Formålet med dette prosjektet er derfor å avdekke noe om hvordan elever arbeider med algebra, og forhåpentligvis bidra til hvordan vi kan forbedre noe av undervisningen i algebra.

Problemstillingen for prosjektet er
"Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer i arbeid med figurtall?"

Forskningsspørsmålene prosjektet jobber ut fra er
1. Hvilke strategier benytter elever når de generaliserer et uttrykk basert på arbeid med figurtall med lineær vekst?
2. Hva sier elevenes strategier om deres forståelse for generalisering?

Prosjektet er en masteroppgave knyttet til masterstudiet «Master i realfagenes didaktikk» ved Høgskolen i Innlandet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Høgskolen i Innlandet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi ditt barn er elev ved 9. trinn ved Frosta skole, som har sagt seg positive til å medvirke til prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å samtykke til at ditt barn deltar i prosjektet, innebærer dette at h*n kan plukkes ut til å delta i et gruppearbeid hvor oppgaven er å generalisere et uttrykk ut fra figurtall. Det vil bli benyttet videoopptak under arbeidet. Videoopptaket vil kun eksistere en begrenset periode mens dataene til prosjektet analyseres, før opptaket slettes. I samarbeid med skolen vil gruppearbeidet legges opp slik at det i minst mulig grad går utover elevens undervisning.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun ansvarlig student og veileder ved Høgskolen i Innlandet som vil ha tilgang til opplysningene.
- Videofilene vil kun lagres på ekstern lagringsenhet, som holdes innelåst når de ikke benyttes. I tillegg vil samtykkeskjema som inneholder navn på deltakerne oppbevares adskilt fra videoopptak. Disse vil makuleres ved prosjektets slutt, mens videopptak vil slettes.
- Deltakerne vil anonymiseres i den ferdige masteroppgaven, og skal på ingen måte kunne gjenkjennes i publikasjon av resultatene.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er i juni 2022. Da vil alle opplysninger og videoopptak slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Høgskolen i Innlandet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Ansvarlig student, Mali Liberg Hønnås, på epost (mhonnas@hotmail.com) eller på telefon 456 36 593.
- Høgskolen i Innlandet ved Reinert Rinvold på epost (reinert.rinvold@inn.no) eller telefon 62 51 78 89
- Vårt personvernombud: Usman Asghar på epost (usman.asghar@inn.no) eller telefon 61 28 74 83

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Mali Liberg Hønnås / Reinert Rinvold

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Strategier for generalisering i arbeid med figurtall», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn:

☐ deltar i videoopptak under gruppearbeid med en oppgave knyttet til figurtall

Jeg samtykker til at _____________s (navn på prosjektdeltaker/ elev) opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltakers foreldre/ foresatt, dato)